Antes de seguir, nos interesa resaltar dos propiedades de la norma cociente.
i) $\| [x] \|_{X/W} \ \leq \ \|x\|, \ \forall \, x \in X$.

Recordemos que la proyección canónica $\pi : X \to X/W$ está definida por $\pi(x) = [x], \forall \, x \in X$ y que es un operador lineal. Podemos notar entonces que la desigualdad anterior indica que π es continuo y $\|\pi\| \leq 1$.

ii) Sean $x \in X$ y $r > 0$.

$$\text{Si } \| [x] \|_{X/W} < r, \text{ entonces existe } w \in W \text{ tal que } \|x - w\| < r. \tag{3.11}$$

El próximo resultado es muy útil para probar la completez de un espacio normado en varias situaciones. Una de ellas es en el caso del espacio cociente.

Lema 4. *Sea X un espacio normado. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X y tiene una subsucesión convergente, entonces $\{x_n\}$ es convergente.*

Demostración (Tarea 2.11.)

Teorema 4. *Sean X un espacio normado y $W \subseteq X$ un subespacio vectorial cerrado. Si X es completo, entonces el espacio cociente normado X/W también lo es.*

Demostración Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X tal que $\{[x_n]\}$ es de Cauchy en X/W. De acuerdo al lema anterior, para concluir que $\{[x_n]\}$ es convergente construiremos una subsucesión suya $\{[x_{n(k)}]\}$ que sea convergente.

Siendo $\{[x_n]\}$ de Cauchy, empecemos eligiendo $n(1) \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\| [x_{n(1)} - x_m] \|_{X/W} \ < \ 2^{-1}, \ \forall \, m \geq n(1). \tag{3.12}$$

Usando otra vez que $\{[x_n]\}$ es de Cauchy, tomemos después $n(2) > n(1)$ tal que

$$\| [x_{n(2)} - x_m] \|_{X/W} \ < \ 2^{-2}, \ \forall \, m \geq n(2). \tag{3.13}$$

De acuerdo con (3.12) se satisface entonces que

$$\| [x_{n(1)} - x_{n(2)}] \|_{X/W} \ < \ 2^{-1}.$$

Usando de nuevo que $\{[x_n]\}$ es de Cauchy, encontramos $n(3) > n(2)$ de manera que

$$\| [x_{n(3)} - x_m] \|_{X/W} \ < \ 2^{-2}, \ \forall \, m \geq n(3). \tag{3.14}$$

En virtud de (3.15) se cumple ahora que

$$\| \, [x_{n(2)} - x_{n(3)}] \, \|_{X/W} \; < \; 2^{-2}.$$

Repitiendo el proceso anterior obtenemos una subsucesión $\{x_{n(k)}\}$ de $\{x_n\}$, para la cual se satisface que

$$\| \, [x_{n(k)} - x_{n(k+1)}] \, \|_{X/W} \; < \; 2^{-k}, \; \forall \, k \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Ya que la sucesión $\{x_{n(k)}\} \subseteq X$ podría no ser de Cauchy, lo que haremos enseguida es cambiar de representante en la clase de equivalencia $[x_{n(k)}]$, digamos $x_{n(k)}$ por $x_k + w_k$, para que la sucesión $\{x_k + w_k\}$ sí sea de Cauchy.

Escojamos $w_1 = 0$. Por (3.12) se cumple $\| \, [x_{n(1)} + w_1 - x_{n(2)}] \, \|_{X/W} < 2^{-1}$. Usando (3.11) podemos entonces encontrar $w_2 \in W$ tal que

$$\|x_{n(1)} + w_1 - x_{n(2)} - w_2\| < 2^{-1}.$$

A partir de (3.15) se cumple que $\| \, [x_{n(2)} + w_2 - x_m] \, \|_{X/W} \; < \; 2^{-2}$. Usando nuevamente (3.11) elegimos $w_3 \in W$ para que se satisfaga

$$\|x_{n(2)} + w_2 - x_{n(3)} - w_3\| \; < \; 2^{-2}.$$

Así, repitiendo el proceso anterior construimos una sucesión $\{w_k\} \subseteq W$ tal que

$$\|x_{n(k)} + w_k - x_{n(k+1)} - w_{k+1}\| \; < \; 2^{-k}, \; \forall \, k \in \mathbb{N}.$$

Empleando ahora el lema 2.12 se sigue que $\{x_{n(k)} + w_k\}$ es de Cauchy en X y por lo tanto existe $x \in X$ tal que $x_{n(k)} + w_k \to x$. Luego, por la continuidad de la proyección canónica, concluimos que $[x_{n(k)}] = [x_{n(k)} + w_k] \to [x]$. De acuerdo al lema 4, esto prueba lo deseado. $\square$

Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Recordemos que el operador lineal $\widetilde{T}$ inducido por T en el espacio cociente $X/N(T)$, está definido por $\widetilde{T}([x]) = Tx$. Enseguida analizaremos la relación entre la continuidad de T y la de $\widetilde{T}$.

Proposición 2. *Sean X y Y espacios normados. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, entonces $\widetilde{T} : X/N(T) \to Y$ es acotado y $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$.*

Demostración Sea $x \in X$. Entonces

$$\|\widetilde{T}[x]\| = \|Tx\| = \|T(x - w)\| \leq \|T\| \, \|x - w\|, \; \forall \, w \in N(T).$$

Luego, tomando el ínfimo sobre tales w, resulta $\|\widetilde{T}([x])\| \leq \|T\|\|[x]\|_{X/N(T)}$. De aquí se obtiene que $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$.

Por otra parte, se satisface $T = \widetilde{T}\pi$, donde π es la proyección canónica de X sobre $X/N(T)$. Esto implica que $\|T\| \leq \|\widetilde{T}\|\,\|\pi\| \leq \|\widetilde{T}\|$. □

3.4. Equivalencia de las normas en $\mathbb{K}^n$

Sean X un espacio vectorial, $\|\cdot\|_j$ una norma en X y τ_j su topología correspondiente, $j = 1, 2$. Aún cuando las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ sean distintas, las topologías correspondientes pueden ser iguales. Por ejemplo, esto ocurre si $\|\cdot\|_2 = k\|\cdot\|_1$, donde $k > 0$. Luego, es natural preguntarse cómo deben estar relacionadas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ para que $\tau_1 = \tau_2$. En este caso diremos que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son *equivalentes*.

Proposición 3. *Sean X un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ normas en X. Entonces, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes si, y sólo si, existen $c > 0$ y $k > 0$ tales que*

$$c\|x\|_2 \;\leq\; \|x\|_1 \;\leq k\|x\|_2,\ \forall\, x \in X. \tag{3.16}$$

Demostración Para $j = 1, 2$, tomemos $X_j := (X, \|\cdot\|_j)$ y sea τ_j la topología en X_j. Consideremos la inclusión $i : X_2 \to X_1$ y observemos que es un isomorfismo lineal y además $i^{-1} = i$.

$\Longrightarrow$) Puesto que $\tau_1 = \tau_2$, notemos que i y i^{-1} son funciones continuas. Siendo i y i^{-1} operadores lineales, entonces existen $c > 0$ y $k > 0$ tales que

$$\|x\|_1 \leq k\|x\|_2,\ \|x\|_2 \leq c^{-1}\|x\|_1,\ \forall\, x \in X.$$

$\Longleftarrow$) Para establecer que $\tau_1 \subseteq \tau_2$, tomemos $V \in \tau_1$. Ya que i es lineal, la desigualdad derecha en (3.16) señala que i es continuo. En consecuencia $V = i^{-1}(V) \in \tau_2$. La otra contención se obtiene usando i^{-1}. □

Notas
Clase 20, abril 24, 2023
Fernando Galaz Fontes