El siguiente resultado indica que en $\mathbb{K}^n$ sólo hay una topología proveniente de una norma.

Teorema 5. *Todas las normas en $\mathbb{K}^n$ son equivalentes entre sí.*

Demostración Sea $\|\cdot\|$ una norma arbitraria en $\mathbb{K}^n$. Para establecer la conclusión probaremos que $\|\cdot\|$ es equivalente con la norma euclidiana $\|\cdot\|_2$. Consideremos la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en $\mathbb{K}^n$ y $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Luego, usando la desigualdad del triángulo con $\|\cdot\|$ y la desigualdad de Schwarz en $\mathbb{K}^n$, resulta que

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| \, \|e_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Así, eligiendo $k = \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, hemos obtenido que

$$\|x\| \leq k\|x\|_2, \ \forall\, x \in \mathbb{K}^n, \tag{3.17}$$

Demostraremos ahora la existencia de $c > 0$ tal que $c\|x\|_2 \leq \|x\|, x \in \mathbb{K}^n$. Por la 'homogeneidad' de $\|\cdot\|$, esto equivale a probar que el ínfimo de los valores de la norma $\|\cdot\|$ en la esfera euclidiana $S := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_2 = 1\}$ es positivo. Con este propósito veamos primero que la norma $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ es continua. Esto es consecuencia del lema 1.2.1 y (3.17), pues

$$|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\| \leq k\|x - y\|_2, \ \forall\, x, y \in \mathbb{K}^n.$$

Ya que S es compacto en $\mathbb{K}^n$ y $\|\cdot\|$ es continua, existe $x_0 \in S$ tal que $\|x\| \geq \|x_0\|, \ \forall\, x \in S$. Además $\|x_0\| > 0$, pues $x_0 \neq 0$. Eligiendo $c = \|x_0\|$ se satisface entonces que $\|x\| \geq \|x_0\|\|x\|_2, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$. □

Definición 3. Sean X y Y espacios normados.

a) Un operador lineal $T : X \to Y$ es un *isomorfismo topológico*, si es una biyección y tanto T como T^{-1} son continuos.

b) X y Y son *topológicamente isomorfos*, si existe un isomorfismo topológico $T : X \to Y$.

Consideremos un espacio normado V de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$ y fijemos una base suya, $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Definamos $J : \mathbb{K}^n \to V$ y $\|\cdot\|_J : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ por

$$J(a_1, \ldots, a_n) := \sum_{k=1}^{n} a_k v_k, \quad \|x\|_J := \|Jx\|, \quad \forall\, x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n. \tag{3.18}$$

Observemos que J es un isomorfismo, lo cual implica que $\|\cdot\|_J$ es una norma en $\mathbb{K}^n$. Luego, por el teorema anterior existen $c > 0$ y $k > 0$ tales que

$$c\|x\|_2 \;\leq\; \|Jx\| \;\leq k\|x\|_2, \;\forall\, x \in \mathbb{K}^n. \tag{3.19}$$

Esto indica que $J : \mathbb{K}^n \to V$ es un isomorfismo topológico. Así, cualquier espacio normado de dimensión finita n es topológicamente isomorfo con $\mathbb{K}^n$.

Corolario 1. *Sea X un espacio normado. Si $V \subseteq X$ es un subespacio vectorial de dimensión finita, entonces V es completo. En particular, V es cerrado.*

Demostración Si $V = \{0\}$, la conclusión es clara. Supongamos ahora que $n = \dim V > 0$. Consideremos un isomorfismo topológico $J : \mathbb{K}^n \to V$, y sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en V. Ya que J^{-1} es uniformemente continuo, la sucesión $\{J^{-1}x_n\}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}^n$. Luego, existe $y \in \mathbb{K}^n$ tal que $J^{-1}x_n \to y$. Puesto que J es continuo, se sigue que $x_n \to Jy$. $\square$

Ejemplo 8. Fijemos $p \in [1, \infty]$ y sea X el espacio normado que obtenemos al considerar en $c_{0,0}$ la norma p.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $X_n = \{(a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$. Ya que $\dim X_n < \infty$, el corolario 3.1 indica que X_n es cerrado en X. Notando ahora que $X_n^0 = \emptyset$ y $c_{0,0} = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$, concluimos que $c_{0,0}$ es de la primera categoría en X.

Corolario 2. *Sean X y Y espacios normados. Si $T : X \to Y$ es un operador lineal y $\dim X < \infty$, entonces T es continuo.*

Demostración Analicemos primero el caso en que $X = \mathbb{K}^n$. Sea pues $T : \mathbb{K}^n \to Y$ un operador lineal. Entonces, para $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ se cumple

$$\|Tx\| = \|T\left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right)\| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|\|Te_j\| \leq c\|x\|_2,$$

donde $c = (\sum_{j=1}^{n} \|Te_j\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Esto prueba que T es un operador lineal acotado.

Fiemos ahora un isomorfismo topológico $J : \mathbb{K}^n \to X$. Siendo $T \circ J : \mathbb{K}^n \to Y$ un operador lineal, la primera parte de la prueba indica que es continuo. Luego, también lo es $(T \circ J)J^{-1} = T$. $\square$

3.5. Norma en el espacio producto

Sean X y Y espacio normados. Observemos que las funciones

$$\begin{aligned} \|(x,y)\|_p &:= (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}}, \ \forall\, p \in [1,\infty), \\ \|(x,y)\|_\infty &:= \text{máx}\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \end{aligned} \tag{3.20}$$

son normas en $X \times Y$. Ya que

$$\|(x,y)\|_\infty \ \leq \ \|(x,y)\|_p \ \leq 2^{\frac{1}{p}}\|(x,y)\|_\infty,$$

cada norma $\|\cdot\|_p$ es equivalente con $\|\cdot\|_\infty$ y, por lo tanto, cada par de estas normas son equivalentes entre sí. En adelante, salvo que se especifique algo distinto, consideraremos a $\|\cdot\|_\infty$ como la norma en el espacio producto $X\times Y$.

El siguiente resultado se verificó en las tareas.

Proposición 4. *Sean X y Y espacios normados.*
i) Entonces, $\|x\|_X \ \leq \|(x,y)\|_{X\times Y},\ \|y\|_Y \ \leq \|(x,y)\|_{X\times Y},\ \forall\,(x,y) \in X\times Y.$ *Así, las proyecciones $\pi_X : X\times Y \to X$ y $\pi_Y : X\times Y \to Y$ son continuas.*
ii) Sea $\{(x_n,y_n)\}$ una sucesión en $X\times Y$ y $(x,y) \in X\times Y$. Entonces $(x_n,y_n) \to (x,y)$ en $X\times Y$ si, y sólo si, $x_n \to x$ en X y $y_n \to y$ en Y. Es decir, la convergencia en $X\times Y$ equivale a la convergencia por componentes.
iii) Si X y Y son completos, entonces $X\times Y$ también lo es.

Espacios métricos

Sean M y N espacios métricos. De la discusión anterior desarrollada para el caso de espacios normados, podemos apreciar que es posible dotar a $M\times N$ con métricas distintas y que, sin embargo, determinen las misma topología. Cuando no se indique otra cosa, en $M\times N$ se considerará la métrica

$$d_{M\times N}((m_1,n_1),(m_2,n_2)) := \text{máx}\{d_M(m_1,m_2), d_N(n_1,n_2)\}. \tag{3.21}$$

Consideremos $\{x_n\} \subseteq M,\ \{y_n\} \subseteq N$ y $x \in M,\ y \in N$. Directamente de la definición (3.21) resulta que, como en el caso de espacios normados, la convergencia en $M\times N$ equivale a la convergencia por componentes:

$$(x_n,y_n) \to (x,y) \text{ en } M\times N \text{ si, y sólo si, } x_n \to x \text{ en } M \text{ y } y_n \to y \text{ en } N. \tag{3.22}$$

Como en el caso de espacios normados, se cumple también que las proyecciones sobre los espacios métricos M y N son funciones continuas.

Usando (3.22) se obtiene sin dificultad el siguiente resultado.

Proposición 5. *Sean E un espacio topológico, M y N espacios métricos, y $h = (f, g) : E \to M \times N$. Entonces h es continua en $p \in E$ si, y sólo si, $f : E \to M$ y $g : E \to N$ lo son.*

Tres resultados fundamentales

A continuación estableceremos tres propiedades fundamentales que requieren de la completez de un espacio normado para ser válidas: el teorema del mapeo abierto, el teorema de la gráfica cerrada y el principio de acotamiento uniforme. El punto de partida es el teorema de categoría de Baire, establecido en el capítulo anterior en el marco de espacios métricos completos.

3.6. Teoremas del mapeo abierto y de la gráfica cerrada

Antes de enunciar el teorema del mapeo abierto conviene introducir la próxima definición.

Definición 4. Sean E y F espacios topológicos. Una función $f : E \to F$ *preserva abiertos*, si cuando $W \subseteq E$ es abierto, entonces $f(W) \subseteq F$ es abierto.

El teorema del mapeo abierto se expresa entonces como sigue.

Teorema 6. *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si T es suprayectiva, entonces T preserva abiertos.*

Para probarlo estableceremos antes un resultado auxiliar.

Lema 5. *Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces, T preserva abiertos si, y sólo si, existe $r > 0$ tal que*

$$rB_Y \subseteq T(B_X). \tag{3.23}$$

Demostración Supongamos primero que existe $r > 0$ como en (3.23). Sea $W \subseteq X$ un conjunto abierto y consideremos $y \in TW$. Para probar que y es un punto interior de TW, elijamos primero $x \in W$ tal que $Tx = y$. Enseguida, puesto que W es abierto, tomemos $\rho > 0$ de manera que $x + \rho B_X \subseteq W$. Por la linealidad de T, esto implica

$$Tx + \rho T B_X \subseteq TW.$$

Usando (3.23), de aquí se obtiene

$$Tx + \rho r B_Y \subseteq TW.$$

Lo cual muesta que $y = Tx$ es un punto interior de TW.

Supongamos ahora que T preserva abiertos. Entonces $TV_1(0) \subseteq Y$ es abierto. Ya que $0 \in TV_1(0)$, existe $r > 0$ tal que se cumple (3.23). $\square$

Notas
Clase 21, abril 26, 2023
Fernando Galaz Fontes