Pasamos ahora a la demostración del teorema del mapeo abierto.
Demostración Tomemos

$$A_n = n\overline{TB_X} = \overline{nTB_X} = \overline{T(nB_X)},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ya que T es suprayectiva y $\cup_{n=1}^{\infty} T(nB_X) = T(\cup_{n=1}^{\infty} nB_X) = T(X)$, resulta

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = Y.$$

Siendo cada conjunto A_n cerrado, el teorema de Baire indica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que A_N tiene interior no-vacío. Luego, el interior de $\frac{1}{N}A_N = \overline{TB_X}$ también es no-vacío. Esto permite escoger $y_0 \in Y$ y $0 < \rho < 1$ tal que

$$B_\rho(y_0) \subseteq \overline{TB_X}.$$

Lo cual equivale a que $y_0 + \rho B_Y \subseteq \overline{TB_X}$. De aquí resulta que

$$-y_0 + \rho B_Y = -y_0 - \rho B_Y \subseteq -\overline{TB_X} = \overline{T(-B_X)} = \overline{TB_X}.$$

De lo anterior y de la convexidad de $\overline{TB_X}$, obtenemos ahora que

$$2\rho B_Y \subseteq \overline{TB_X} + \overline{TB_X} \subseteq 2\overline{TB_X}.$$

Por consiguiente

$$\rho B_Y \subseteq \overline{TB_X}. \tag{3.24}$$

Mostraremos a continuación que esto implica

$$\rho B_Y \subseteq (1-\rho)^{-1} TB_X. \tag{3.25}$$

De aquí, por el lema anterior, resultará lo afirmado.

A partir de (3.24) se obtiene

$$\rho^n B_Y \subseteq \overline{T(\rho^{n-1}B_X)},\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.26}$$

Sea $y \in Y$ tal que $\|y\| \leq \rho$. En virtud de (3.26) con $n = 1$, se cumple que $y \in \overline{TB_X}$. Luego, existe $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\| \leq 1$ y

$$\|y - Tx_1\| \ \leq \rho^2.$$

De aquí por (3.26) otra vez, ahora con $n = 2$, resulta que $y - Tx_1 \in \overline{\rho TB_X}$. Esto permite, encontrar $x_2 \in X$ tal que $\|x_2\| \leq \rho$ y

$$\|y - Tx_1 - Tx_2\| \ \leq \rho^3.$$

Continuando con este proceso, construimos una sucesión $\{x_n\} \subseteq X$ tal que

$$\|x_n\| \leq \rho^{n-1}, \quad \|y - \sum_{j=1}^{n} Tx_j\| \leq \rho^{n+1}.$$

Por una parte, esto implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente y, siendo X completo, concluimos que converge, digamos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in X$. Por otra parte, se cumple que $y = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$. Entonces, por la continuidad de T, se satisface

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = y.$$

Puesto que

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1} = \frac{1}{1-\rho},$$

se cumple (3.25). $\square$

Observación 4. La demostración previa ilustra la forma más común en que se usa el teorema de Baire. Supongamos que M es un espacio métrico completo no vacío. Se busca expresar entonces $M = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, donde cada B_n es cerrado. Por el teorema de Baire, alguno de estos cerrados tiene interior no-vacío. Partiendo de este cerrado se trata ahora de resolver el problema en cuestión.

Corolario 3. *Sean X y Y espacios de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y T es una biyección, entonces T es un isomorfismo topológico.*

Demostración Notemos que sólo resta establecer que el operador lineal $T^{-1} : Y \to X$ es continuo. Sea $V \subseteq X$ un conjunto abierto. Siendo T una biyección, se cumple

$$(T^{-1})^{-1}(V) = T(V).$$

Por el teorema del mapeo abierto, esto implica que $(T^{-1})^{-1}(V)$ es abierto. Luego, T^{-1} es continua. $\square$

Para establecer el próximo resultado necesitamos antes unas definiciones.

Definición 5.

a) Sean D y B conjuntos. La gráfica de una función $f : D \to B$ es el conjunto

$$G(f) := \{(x, y) : x \in D, y = f(x)\} \subseteq D \times B.$$

b) Sean M y N espacios métricos y $f : M \to N$. Diremos que la gráfica de f es *cerrada*, si su gráfica $G(f)$ es cerrado en el espacio métrico $M \times N$.

Los siguientes resultados relacionan la continuidad de una función con que su gráfica sea cerrada.

Proposición 6. *Sean M y N espacios métricos. Si $f : M \to N$ es continua, entonces su gráfica es cerrada.*

Demostración Sea $\{w_n\}$ una sucesión en $G(f)$ y $w \in M \times N$ tal que $w_n \to w$. Expresemos $w_n = (x_n, f(x_n)), w = (x, y)$, donde $x_n \in M,\ \forall n \in \mathbb{N}$, y $x \in M,\ y \in N$. Por la definición de la métrica en $M \times N$, resulta

$$x_n \to x,\ f(x_n) \to y.$$

Ya que f es continua, esto implica que $f(x_n) \to f(x)$. Por consiguiente $y = f(x)$, lo cual señala que $w \in G(f)$. $\square$

El recíproco de la proposición anterior no siempre es válido. Sin embargo, a continuación mostraremos que sí lo es cuando $f = T : X \to Y$ es lineal y X, Y son espacios de Banach.

Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ un operador lineal. Es sencillo verificar entonces que $G(T)$ es un subespacio vectorial de $V \times W$.

Corolario 4 (Tma. de la gráfica cerrada)**.** *Sean X y Y espacios de Banach. Si $T : X \to Y$ es un operador lineal y su gráfica es cerrada, entonces T es continuo.*

Demostración Puesto que X y Y son espacios de Banach, el espacio producto $X \times Y$ también lo es. Ya que $G(T) \subseteq X \times Y$ es un conjunto cerrado, esto implica que $G(T)$ es un espacio de Banach.

Sean π_X y π_Y las proyecciones sobre X y Y, respectivamente, esto es $\pi_X((x, y)) = x, \pi_Y((x, y)) = y$. Observemos que $J = \pi_X : G(T) \to X$ es un isomorfismo y que J es acotado. Aplicando ahora el teorema del mapeo abierto, se sigue que $J^{-1} : X \to G(T)$ es continua. Luego, también lo es

$$\pi_Y J^{-1} = T.\ \square$$

Observación 5. Notemos que la condición de que la gráfica del operador lineal $T : X \to Y$ sea cerrada equivale a que

$$\text{si } \{x_n\} \subseteq X,\ x \in X,\ y \in Y, x_n \to x \text{ y } Tx_n \to y,\ \text{entonces } y = Tx.$$

Ejemplo 9. Un operador lineal discontinuo y cuya gráfica es cerrada

Sea X el subespacio normado de $C([0,1])$ formado por todas aquellas funciones $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ que son de clase C^1, esto es que tienen derivada continua. Para $f \in X$ definamos

$$Df = f'.$$

Las propiedades de la derivada indican que $D : X \to C[0,1]$ es lineal. Para mostrar que D no es acotado, consideremos la sucesión $\{f_n\}$, donde $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{f_n\} \subseteq X$ y $f_n \to 0$ en X. Por otra parte, $f_n'(x) = \cos nx$ y, por lo tanto, $\|f_n'\|_\infty = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Así, $Df_n \not\to 0$ en X.

Veamos ahora que la gráfica de D es cerrada en $X \times C[0,1]$. Para ello consideremos una sucesión $\{f_n\} \subseteq X$ y $f \in X$, $g \in C[0,1]$ tales que

$$f_n \to f, \quad f_n' \to g.$$

Puesto que la convergencia en X es la convergencia uniforme, esto implica que f es derivable y $f' = g$. Luego, $(f,g) \in G(D)$.

Notas
Clase 22, mayo 5, 2023
Fernando Galaz Fontes