3.7. Teorema de acotamiento uniforme

Teorema 7 (Tma. de acotamiento uniforme)**.** *Sean X y Y espacios normados, $I \neq \emptyset$ y $\{T_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$. Si X es completo y, para cada $x \in X$, $\{T_\alpha(x) : \alpha \in I\} \subseteq Y$ es acotado, entonces $\{T_\alpha\}$ es acotado en $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Demostración Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$A_n = \{x \in X : \|T_\alpha(x)\| \leq n, \ \forall\, \alpha \in I\}.$$

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ y sea $\alpha \in I$. Puesto que T_α es continuo, notemos que el conjunto $\{x \in X : \|T_\alpha(x)\| \leq n\}$ es cerrado. Luego A_n es una intersección de conjuntos cerrados y, en consecuencia, también es cerrado. Además, de la hipótesis se sigue directamente que $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Siendo X completo, el teorema de Baire indica que existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que $A_N^0 \neq \emptyset$.

Fijemos $x \in A_N$ y $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq A_N$. Sea $y \in B_X$. Luego $x + ry \in B_r(x)$ y, por lo tanto, $\|T_\alpha(x + ry)\| \leq N, \ \forall\, \alpha \in I$. Entonces

$$r\|T_\alpha(y)\| = \|T_\alpha(x + ry) - T_\alpha x\| \leq \|T_\alpha(x + ry)\| + \|Tx\| \leq 2N, \ \forall\, \alpha \in I.$$

Lo cual implica que $\|T_\alpha\| \leq \frac{2N}{r}, \forall\, \alpha \in I$. $\square$

Ejemplo 10. Una sucesión de operadores lineales continuos que son acotados puntualmente y no lo son uniformemente

Sea $X = c_{0,0}$, el espacio formado por las sucesiones que son eventualmente cero, con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la n-ésima función proyección $\pi_n : X \to \mathbb{K}$, esto es $\pi_n(a_1, \ldots, a_m, \ldots) = a_n$. Notemos que $n\pi_n \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$. Sea $x = (a_1, \ldots, a_m, \ldots) \in X$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que $a_n = 0, \ \forall\, n \geq N$. Luego $n\pi_n(x) = 0, \ \forall\, n \geq N$. Esto muestra que la colección $\{n\pi_n\}$ es puntualmente acotada. Por otra parte, $n\pi_n(e_n) = n$, por lo que $\{n\pi_n\} \subseteq \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ no es acotada.

Corolario 5. *Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado, $\{T_n\} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ y $T : X \to Y$. Si $T_n x \to Tx, \ \forall\, x \in X$, entonces la sucesión $\{T_n\}$ es acotada, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| < \infty$.*

Demostración Probaremos primero que la sucesión $\{T_n\} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ es acotada. Esto implica que $\liminf_{n\to\infty} \|T_n\| < \infty$.

De acuerdo con el principio de acotamiento uniforme, basta con verificar que, para cada $x \in X$, el conjunto $\{T_n x : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado. Lo cual es claro ya que $\{T_n x\}$ es una sucesión convergente. Observemos después que, por ser límite puntual de funciones lineales (lema 2.4.16), T es lineal. Enseguida, tomando $\liminf$ en la desigualdad $\|T_n x\| \leq \|T_n\| \, \|x\|$, $\forall\, x \in X$, se obtiene

$$\|Tx\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \, \|x\|, \ \forall\, x \in X.$$

Por lo tanto $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$. $\square$

Capítulo 4

Espacios de Hilbert

Algunas propiedades fundamentales de $\mathbb{R}^n$ no dependen únicamente de que la función $\|\cdot\|_2$ sea una norma, sino de que ésta se puede definir de manera especial, a partir de un producto escalar. A continuación introduciremos y estudiaremos este tipo de espacios normados.

4.1. Producto escalar y desigualdad de Schwarz

Definición 1. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un *producto escalar* en X es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ con las siguientes propiedades:
a) $\langle x,x\rangle \;\geq\; 0$ y $\langle x,x\rangle \;=\; 0$ si, y sólo si, $x = 0$.
b) $\langle ax,y\rangle \;=\; a\langle x,y\rangle, \; \forall\, a \in \mathbb{K}$.
c) $\langle x+z,y\rangle \;=\; \langle x,y\rangle + \langle z,y\rangle$.
d) $\langle y,x\rangle \;=\; \overline{\langle x,y\rangle}$.

Observación 1.
1. Para cada $y \in X$, definamos el funcional $\varphi_y : X \to X$ por

$$\varphi_y(x) := \langle x,y\rangle$$

Notemos que las propiedades b) y c) equivalen a la linealidad de φ_y. Luego

$$\langle 0,y\rangle = \varphi_y(0) = 0. \; \forall\, y \in H. \tag{4.1}$$

2. Supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Entonces $\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}$, por lo que la propiedad d) toma la forma

$$\langle y,x\rangle \;=\; \langle x,y\rangle, \;\forall\, x,y \in X.$$

3. A partir de las condiciones b), c) y d), resulta

$$\langle x, ay + bz\rangle \;=\; \overline{a}\langle x, y\rangle + \;\overline{b}\langle x, z\rangle,\;\; \forall\, a, b \in \mathbb{K},\quad x, y, z \in X.$$

Ejemplo 1. El producto escalar en $\mathbb{K}^n$ está definido por

$$\langle (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)\rangle \;:=\; \sum_{j=1}^{N} a_j \overline{b_j}. \tag{4.2}$$

Observemos que, para definir el producto escalar, en el caso complejo no se considera b_j sino su conjugado $\overline{b_j}$, $j = 1, \ldots, n$. Esto se requiere para que se cumpla $\langle x, x\rangle \geq 0,\; \forall\, x \in \mathbb{C}^n$.

Ejemplo 2. El espacio normado

$$\ell^2(\mathbb{K}) = \{\{a_n\} \subseteq \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$$

es la generalización de $\mathbb{R}^n$ con su norma euclidiana. Teniendo presente el producto escalar (4.2), la siguiente definición resulta natural.

En $\ell^2(\mathbb{K})$ definimos

$$\langle \{a_n\}, \{b_n\}\rangle \;:=\; \sum_{j=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}. \tag{4.3}$$

Naturalmente, debemos probar ahora que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ está bien definido, esto es que la serie de la derecha en (4.3) converge. Para esto basta verificar que es absolutamente convergente, lo cual resulta de la desigualdad de Hölder en ℓ^2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_n||b_n| \;\leq\; \|x\|_2\, \|y\|_2,\;\; \forall\, x = \{a_n\},\;\; y = \{b_n\} \in \ell^2.$$

Habiendo establecido que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ está bien definido, las propiedades que debe tener para ser un producto escalar son consecuencia directa de las propiedades correspondientes de las series convergentes.

Así como el producto escalar en $\mathbb{K}^n$ determina la norma euclidiana, a continuación mostraremos que cada producto escalar determina una norma.

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar en un espacio vectorial X. Definamos

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \ \forall\, x \in X. \tag{4.4}$$

Por la condición d) en la definición de producto escalar, se cumple $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$. Además, de la condiciones a) y c) se obtiene

$$\|ax\| = |a|\|x\|, \ \forall\, a \in \mathbb{K}, \ x \in X.$$

Luego, para concluir que $\|\cdot\|$ es una norma sólo falta establecer la desigualdad del triángulo. Su demostración se basa en otra desigualdad muy importante, la cual introduciremos enseguida.

Para fijar ideas supondremos a continuación que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sean $x, y \in X$ y fijemos $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $e^{i\theta}\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|$. Tomando ahora conjugado y teniendo presente que $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, se obtiene que $e^{-i\theta}\langle y, x \rangle = |\langle x, y \rangle|$.

Supongamos que $\| \cdot \|$ satisface la desigualdad del triángulo. Entonces

$$\|e^{i\theta}x + y\| \ \leq \ \|e^{i\theta}x\| + \|y\| \ = \ \|x\| + \|y\|.$$

"Elevando al cuadrado" obtenemos la desigualdad equivalente:

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle + \langle e^{i\theta}x, y \rangle + \langle y, e^{i\theta}x \rangle + \langle y, y \rangle \ &= \ \langle e^{i\theta}x + y, e^{i\theta}x + y \rangle \\ &\leq \ \langle x, x \rangle + 2\|x\| \, \|y\| + \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

Simplificando ahora llegamos a la desigualdad

$$2|\langle x, y \rangle| = \langle e^{i\theta}x, y \rangle + \langle y, e^{i\theta}x \rangle \ \leq \ 2\|x\| \, \|y\|.$$

Esto prueba que para que $\| \cdot \|$ satisfaga la desigualdad del triángulo, el producto escalar debe cumplir la desigualdad

$$|\langle x, y \rangle| \ \leq \ \|x\| \, \|y\|, \tag{4.5}$$

a la cual llamaremos *desigualdad de Schwarz*.

Recíprocamente, supongamos que se satisface la desigualdad de Schwarz y tomemos $x, y \in X$. Entonces $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ equivale a

$$\langle x + y, x + y \rangle = \|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2.$$

Desarrollando en el miembro izquierdo y simplificando después llegamos a la desigualdad equivalente $\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \leq 2\|x\|\|y\|$. Esta se cumple pues como consecuencia de la desigualdad de Schwarz resulta

$$\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} = 2\mathrm{Re}\, \langle x, y \rangle \leq 2|\langle x, y \rangle| \leq 2\|x\|\|y\|.$$

Para establecer la desigualdad de Schwarz introduciremos antes un concepto que resulta fundamental.

Definición 2. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar en un espacio vectorial X. Dos vectores $x, y \in X$ son *ortogonales*, si $\langle x, y \rangle = 0$. Para expresar que esto sucede indicaremos $x \perp y$.

Si $x \perp y$, conviene notar que $y \perp x$. Dejamos al lector establecer el siguiente resultado básico.

Teorema 1 (de Pitágoras.)**.** *Sea X un espacio vectorial con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\|\cdot\|$ la función definida por (4.4). Si $x, y \in X$ son ortogonales, entonces*

$$\|x + y\|^2 \;=\; \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Teorema 2 (Desigualdad de Schwarz.)**.** *Sea X un espacio vectorial con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\|\cdot\|$ la función definida por (4.4). Entonces*

$$|\langle x, y \rangle| \;\leq\; \|x\|\,\|y\|, \;\forall\, x, y \in X. \tag{4.6}$$

De manera más precisa: si x, y son linealmente dependientes, entonces se cumple la igualdad y en caso contrario la desigualdad es estricta.

Demostración Sean $x, y \in X$. Consideremos primero el caso en que x, y son linealmente dependientes y elijamos $a, b \in \mathbb{K}$ tales que $ax + by = 0$, y $a \neq 0$ o $b \neq 0$. Si $x = 0$, la desigualdad (4.6) es clara. Supongamos ahora que $x \neq 0$. Luego $b \neq 0$ y $y = cx$, siendo $c = -\frac{a}{b}$. Entonces

$$|\langle x, y \rangle| \;=\; |c|\|x\|^2 = \|x\|(|c|\|x\|) = \|x\|\,\|y\|.$$

Supongamos ahora que los vectores x, y son linealmente independientes. La idea es primero "ortogonalizar" el sistema $\{x, y\}$ y usar el nuevo sistema ortogonalizado para calcular $\langle x, y \rangle$. Así, buscamos $a \in \mathbb{K}$ y $w \in X$ tales que

$$y = ax + w, \;\langle x, w \rangle = 0. \tag{4.7}$$

La condición $\langle x, w \rangle = 0$ equivale a $\langle x, y \rangle - a\|x\|^2 = 0$, esto es

$$a = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2}.$$

Tomando ahora $w = y - ax$ obtenemos (4.7). Lo cual implica que

$$|\langle x, y\rangle| \; = |x, \langle ax + w\rangle| = \; |a|\|x\|^2. \tag{4.8}$$

Por otra parte, de (4.7) y el teorema de Pitágoras, resulta

$$\|x\|\,\|y\| = \|x\|(|a|^2\|x\|^2 + \|w\|^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.9}$$

Por ser x y y linealmente independientes, notemos ahora que $w \neq 0$. La conclusión se obtiene comparando enseguida (4.8) con (4.9). $\square$

Notas
Clase 23, mayo 8, 2023
Fernando Galaz Fontes