Corolario 1. *Sea X un espacio vectorial con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Entonces la función*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

es una norma en X, a la cual llamaremos norma inducida *por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Definición 3.
a) Un espacio H con producto escalar es un *espacio de Hilbert* si es completo, bajo la norma inducida.
b) Para referirnos a un espacio normado cuya norma provenga de un producto escalar, diremos simplemente que es un espacio *pre-Hilbert*.

Ejemplo 3. En el ejemplo 1 presentamos el producto escalar en $\mathbb{K}^n$. Notemos que la correspondiente norma inducida es la norma euclidiana en $\mathbb{K}^n$. Lo mismo sucede en el ejemplo 2, donde tratamos el caso de ℓ^2. Ya que ambos espacios normados son completos resulta que cada uno de ellos, con su respectivo producto escalar, es un espacio de Hilbert.

La siguiente propiedad de una norma que proviene de un producto escalar resulta ser fundamental.

Teorema 3 (Ley del paralelogramo)**.** *Sea H un espacio pre-Hilbert. Entonces*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \ \forall\, x, y \in H.$$

Demostración Sean $x, y \in H$. Luego

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \ \square\end{aligned}$$

Observación 2. Supongamos que $\|\cdot\|$ es una norma en X. Si la ley del paralelogramo no se cumple, el resultado anterior indica que $\|\cdot\|$ no proviene de un producto escalar. Por otra parte, si una norma satisface la ley del paralelogramo, J. Von Neumann (1903-1957) demostró que es posible construir un producto escalar que induzca dicha norma.

En un espacio pre-Hilbert se cuenta con el siguiente criterio para analizar una igualdad.

Lema 1. *Sean H un espacio pre-Hilbert y $x, y \in H$. Entonces $x = y$ si, y sólo si,*

$$\langle x, u\rangle \;=\; \langle y, u\rangle,\ \forall\, u \in H. \tag{4.10}$$

Demostración Si $x = y$ claramente se cumple (4.10). Supongamos ahora que (4.10) se satisface. Luego, $\langle x-y, u\rangle = 0,\ \forall\, u \in H$. Tomando $u = x - y$, esto implica $\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = 0$. Por consiguiente, $x = y$. □

Consideremos espacios de Hilbert H y K. En lugar de la norma usual $\|(\cdot,\cdot)\|_\infty = \text{máx}\{\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_K\}$ en el espacio producto $H\times K$, en este caso conviene considerar una norma equivalente que provenga de un producto escalar. Esto conduce a considerar la función

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle_{H\times K} \;:=\; \langle x_1, x_2\rangle_H + \langle y_1, y_2\rangle_K \tag{4.11}$$

Procediendo directamente se verifica que esta función define un producto escalar en $H\times K$. La norma que induce está determinada entonces por

$$\|(x,y)\|_2^2 = \langle (x,y),(x,y)\rangle_{H\times K} := \langle x, x\rangle_H + \langle y, y\rangle_K = \|x\|_H^2 + \|y\|_K^2.$$

Así, cuando H y K son espacios pre-Hilbert, la norma que consideraremos en $H \times K$ es la norma $\|\cdot\|_2$, introducida en la subsección 3.4.1. Se cumple entonces lo siguiente.

Proposición 1.

i) Si H y K son espacios pre-Hilbert, entonces $H\times K$ también lo es.

ii) Si H y K son espacios de Hilbert, entonces $H\times K$ también lo es.

El producto escalar y la convergencia tienen la siguiente propiedad, a la cual nos referiremos como *continuidad del producto escalar.*

Lema 2. *Sean H un espacio pre-Hilbert, $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq H$, $x, y \in H$. Si $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.*

Demostración Por las propiedades del producto escalar y la desigualdad de Schwarz, se cumple

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \\ &\le \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\|. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Por ser convergente, la sucesión $\{x_n\}$ es acotada. Esto implica que la sucesión de la derecha en (4.12) converge a cero. De aquí se sigue lo afirmado. □

4.2. Proyección ortogonal

Sea M un espacio métrico. Para cada subconjunto no-vacío $K \subseteq M$ en el ejemplo 2.8 establecimos la continuidad de la función distancia a K, definida por $d_K(x) := \text{ínf}\{d(x,y) : y \in K\}$. Tomemos ahora como M un espacio pre-Hilbert H y supongamos que, además de ser no-vacío, $K \subseteq H$ es convexo y completo, A partir de d_K construiremos a continuación una función "proyección" sobre K, $P_K : H \to H$, que resulta ser muy importante. Cuando $K = V$ sea un subespacio vectorial cerrado y H sea completo, la proyección P_V resulta ser un operador lineal y nos permitirá descomponer a H en subespacios vectoriales "más sencillos".

Cuando no se diga otra cosa, el espacio pre-Hilbert H es real o complejo.

Teorema 4 (de la proyección)**.** *Sean H un espacio pre-Hilbert y $K \subseteq H$ un conjunto no-vacío, convexo y completo. Entonces, para cada $x \in H$ existe un único punto $y_0 \in K$ tal que*

$$\|x - y_0\| = d(x, K). \tag{4.13}$$

A este punto y_0 lo llamaremos proyección de x sobre K y lo denotaremos por $P_K(x)$.

Demostración Sea $x \in H$, tomemos $d = d(x, K)$ y escojamos una sucesión $\{y_n\} \subseteq K$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| \; = \; d. \tag{4.14}$$

Estableceremos que $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Por la ley del paralelogramo, se cumple

$$2(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2) = \|y_n + y_m - 2x\|^2 + \|y_n - y_m\|^2.$$

Lo cual implica que

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2) - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2. \tag{4.15}$$

Ya que K es convexo, notemos que $\frac{y_n+y_m}{2} \in K$. Luego, $\|\frac{y_n+y_m}{2} - x\| \geq d$ y, a partir de (4.15), se obtiene entonces

$$\|y_m - y_n\|^2 \; \leq \; 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4d^2.$$

Puesto que $\lim_{k\to\infty}\|x-y_k\|^2 = d^2$, de la desigualdad anterior resulta que la sucesión $\{y_n\}$ es de Cauchy. Definamos $y_0 := \lim_{n\to\infty} y_n$. Luego, por la continuidad de la norma se satisface que

$$\|x-y_0\| \;=\; \lim_{n\to\infty}\|x-y_n\| \;=\; d.$$

Supongamos ahora que $w_0 \in K$ satisface $\|x-w_0\| = d$. Consideremos entonces la sucesión $\{y_n\}$, donde $y_{2n+1} = y_0$ y $y_{2n} = w_0, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Observando que $\|x-y_k\| = d, \forall\, k \in \mathbb{N}$, de la primera parte de la prueba resulta que $\{y_k\}$ es convergente. Esto implica que $w_0 = y_0$. □

Observación 3. Para simplificar la notación, en adelante denotaremos a la proyección P_K, donde $K \subseteq H$ es no-vacío, convexo y completo, simplemente por P.

Si $y \in K$, notemos que $Py = y$. Entonces $P(P(x)) = P(x), \forall\, x \in H$, esto es, $P^2 = P$.

A continuación estableceremos la continuidad de la proyección P.

Lema 3. *Sea $K \subseteq H$ un conjunto no-vacío, convexo y completo. Sean $x \in H$ y $y_0 \in K$. Entonces $y_0 = P(x)$ si, y sólo si,*

$$Re\,\langle x-y_0, u-y_0\rangle \;\leq\; 0,\;\; \forall\, u \in K. \tag{4.16}$$

Demostración $\Longleftarrow$) Supongamos que $y_0 \in K$ satisface (4.16). Por la unicidad de $P(x)$, basta establecer que $\|x-y_0\| \leq \|x-y\|, \forall\, y \in K$. Sea pues $y \in K$. Luego

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \|x-y_0+y_0-y\|^2\\ &= \|x-y_0\|^2 + 2Re\langle x-y_0, y_0-y\rangle + \|y_0-y\|^2 \geq \|x-y_0\|^2.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$) Sea $y \in K$. Probaremos (4.16) con $y_0 = Px$. Puesto que K es convexo, se cumple que $P(x) + t(y-P(x)) \in K, \forall\, t \in [0,1]$. Consideremos la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} g(t) &= \|x-P(x)-t(y-P(x))\|^2\\ &= \|x-P(x)\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\,\langle x-P(x), y-P(x)\rangle + t^2\|y-P(x)\|^2.\end{aligned}$$

Ya que g tiene un valor mínimo en $t = 0$ se sigue que $g'(0) \geq 0$, lo cual equivale a que $\mathrm{Re}\,\langle x-P(x), y-P(x))\rangle\; \leq 0$. □

Teorema 5. *Sea $K \subseteq H$ un conjunto no-vacío, convexo y completo. Entonces la proyección P de H sobre K cumple*

$$\|P(x) - P(y)\| \ \leq \|x - y\|, \ \forall\, x, y \in H. \tag{4.17}$$

Demostración Sean $x, y \in H$. Por el lema anterior, se satisface que

$$\mathrm{Re}\,\langle x - P(x), P(y) - P(x)\rangle \ \leq \ 0, \ \ \mathrm{Re}\,\langle y - P(y), P(x) - P(y)\rangle \ \leq \ 0.$$

Lo cual implica que

$$\begin{aligned}
\|P(x) - P(y)\|^2 = \ & \mathrm{Re}\,\langle P(x) - P(y), P(x) - P(y)\rangle \\
= \ & \mathrm{Re}\,\langle x - y + P(x) - x + y - P(y), P(x) - P(y)\rangle \\
= \ & \mathrm{Re}\,(\langle x - y, P(x) - P(y)\rangle \\
& \quad + \mathrm{Re}\,\langle P(x) - x, P(x) - P(y)\rangle + \mathrm{Re}\,\langle y - P(y), P(x) - P(y)\rangle) \\
\leq \ & \mathrm{Re}\,\langle x - y, P(x) - P(y)\rangle \ \leq |\ \langle x - y, P(x) - P(y)\rangle\ | \\
\leq \ & \|x - y\|\, \|P(x) - P(y)\|.
\end{aligned}$$

De aquí se obtiene (4.17) . $\square$

Notas
Clase 24, mayo 10, 2023
Fernando Galaz Fontes