Analizaremos ahora la proyección sobre K, cuando $K = V$ es un subespacio vectorial completo. En este caso es claro que V es no-vacío y convexo.

Definición 5. El *complemento ortogonal* de un conjunto $A \subseteq H$ es

$$A^{\perp} := \{x \in H : \langle x, a\rangle = 0, \forall\, a \in A\}.$$

Enseguida indicamos las propiedades básicas del complemento ortogonal.

Teorema 6. *Sea $A \subseteq H$. Entonces:*
i) $A^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado.
ii) $A \cap A^{\perp} \subseteq \{0\}$.
iii) Si $A \subseteq B \subseteq H$, entonces $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.
iv) $A^{\perp} = \langle A\rangle^{\perp}$.
v) $A^{\perp} = \overline{A}^{\perp}$.

Demostración . Probaremos las propiedades i)-iv) y dejaremos probar como ejercicio la restante.

i) Sean $x, y \in A^{\perp}, c \in \mathbb{K}$. Por las propiedades del producto escalar, para cada $a \in A$, se satisface $\langle 0, a\rangle = 0$ y

$$\langle x + y, a\rangle \;=\; \langle x, a\rangle + \langle y, a\rangle = 0,\;\; \langle cx, a\rangle \;= c\langle x, a\rangle \;=\; 0.$$

Esto indica que $0, x + y, cx \in A^{\perp}$. Así, $A^{\perp}$ es un subespacio vectorial de H.

Consideremos ahora $x \in \overline{A^{\perp}}$ y tomemos una sucesión $\{x_n\} \subseteq A^{\perp}$ tal que $x_n \to x$. Por la continuidad del producto escalar se cumple entonces que

$$\langle x, a\rangle \;=\; \lim_{n\to\infty} \langle x_n, a\rangle \;=\; 0,\;\; \forall\, a \in A.$$

Esto señala que $x \in A^{\perp}$. Por lo tanto $A^{\perp}$ es cerrado.

ii) Supongamos que $x \in A \cap A^{\perp}$. Luego, $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0$.

iii) Sea $x \in B^{\perp}$ y consideremos $a \in A$. Luego $a \in B$ y, consecuentemente, $\langle x, a\rangle = 0$. Esto indica que $x \in A^{\perp}$.

iv) Si $A = \emptyset$, entonces $\langle A\rangle = \{0\}$. Por lo tanto $A^{\perp} = H = \langle A\rangle^{\perp}$. Supongamos ahora que $A \neq \emptyset$. Puesto que $A \subseteq \langle A\rangle$, al hacer uso de iii) se obtiene que $\langle A\rangle^{\perp} \subseteq A^{\perp}$. Para establecer la otra contención, consideremos $x \in A^{\perp}$ y tomemos $v \in \langle A\rangle$. Luego, $v = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, donde $c_j \in \mathbb{K}, x_j \in A, j = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\langle x, v\rangle \;=\; \left\langle x, \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}\langle x, x_j\rangle \;=\; 0.$$

Esto señala que $x \in \langle A \rangle^\perp$. □

El siguiente resultado indica que, en el caso complejo, el producto escalar queda determinado por su parte real. Lo usaremos en la prueba del teorema de descomposición ortogonal.

Lema 4. *Sea H un espacio complejo con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entonces $Im\langle x, y\rangle = Re\,\langle -ix, y\rangle$, $\forall\, x, y \in H$.*

Demostración Sean $x, y \in H$. La conclusión se obtiene al observar que

$$\langle x, y \rangle \; = i\langle -ix, y\rangle \; = \; i(\mathrm{Re}\,\langle -ix, y\rangle + i\,\mathrm{Im}\langle -ix, y\rangle). \;\; \square$$

Conviene recordar el próximo concepto antes de abordar el teorema de descomposición ortogonal.

Definición 6. Sean X un espacio vectorial y V, W subespacios vectoriales de X. Para expresar que $X = V + W$ y $V \cap W = \{0\}$, indicaremos

$$X = V \oplus W$$

y diremos que X es la *suma directa* de V y W.

Si X es un espacio normado, $V \subseteq X$ es un subespacio cerrado y existe un subespacio cerrado W tal que $X = V \oplus W$, al subespacio V lo llamaremos *complementable*.

Supongamos que $X = V \oplus W$ y $v_1 + w_1 = v_2 + w_2$, donde $v_j \in V, w_j \in W, j = 1, 2$. Luego $v_2 - v_1 = w_1 - w_2 \in V \cap W$. Lo cual implica que $v_2 - v_1 = 0 = w_2 - w_1$. Por consiguiente $v_1 = v_2$ y $w_1 = w_2$. Esto señala que en una suma directa, la representación es única.

Teorema 7 (de descomposición ortogonal)**.** *Si $V \subseteq H$ es un subespacio vectorial completo, entonces:*

i) La proyección P de H sobre V es ortogonal, esto es, $x - Px \in V^\perp, \forall\, x \in H$.

ii) $H = V \oplus V^\perp$.

iii) P es lineal, $\|P\| \leq 1$ y $P^2 = P$.

iv) $V^{\perp\perp} = V$.

Demostración i) Sea $x \in H$ y tomemos $y \in V$. Entonces $Px + y, Px - y \in V$. Luego, aplicando el lema 3 resulta $\mathrm{Re}\,\langle x - Px, y\rangle \; \leq 0$, $\mathrm{Re}\,\langle x - Px, y\rangle \; \geq 0$. Por lo tanto

$$\mathrm{Re}\,\langle x - Px, y\rangle \; = 0, \;\; \forall\, y \in V. \tag{4.17}$$

Si H es un espacio vectorial real, esto concluye la prueba.

Supongamos que H es un espacio vectorial complejo. Usando ahora el lema anterior y que V es un subespacio vectorial, por (4.17) se obtiene

$$\mathrm{Im}\langle x-Px, y\rangle = \mathrm{Re}\,\langle -i(x-Px), y\rangle = \mathrm{Re}\,\langle x-Px, iy\rangle = 0, \ \forall\, y \in V. \quad (4.18)$$

De (4.17) y (4.18) concluimos que $x - Px \in V^{\perp}$.

ii) Ya que V y $V^{\perp}$ son subespacios vectoriales, resulta que $\{0\} \subseteq V \cap V^{\perp}$. La otra contención siempre se cumple, según se indica en ii) del teorema 6.

Claramente $V + V^{\perp} \subseteq H$. Sea $x \in H$. Luego, por i),

$$x = Px + (x - Px) \in V + V^{\perp}.$$

iii) Sean $x, y \in H, c \in \mathbb{K}$. Luego

$$x + y = (Px + Py) + (x - Px + y - Py), \quad cx = cPx + c(x - Px). \quad (4.19)$$

Ya que tanto V como $V^{\perp}$ son subespacios vectoriales, por (4.19) y ii), resulta $P(x + y) = Px + Py, P(cx) = cPx$. Esto prueba que P es lineal.

Puesto que los vectores Px y $x-Px$ son ortogonales y $x = Px+(x-Px)$, se cumple que $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2$. Por consiguiente $\|Px\| \leq \|x\|$. En la observación 3 ya se estableció que $P^2 = P$.

iv) Por último, veamos que $V^{\perp\perp} = V$. Claramente $V \subseteq V^{\perp\perp}$. Consideremos $x \in V^{\perp\perp}$. Para concluir que $x \in V$ probaremos que $x = Px$, esto es, $x - Px = 0$. Esto se sigue de que $x - Px \in V^{\perp}$ y por lo tanto

$$\langle x - Px, x - Px\rangle \ = \ \langle x, x - Px\rangle - \langle Px, x - Px\rangle \ = \ 0. \ \square$$

Corolario 2. *Sea H un espacio de Hilbert.*
i) Si $V \subseteq H$ es un subespacio vectorial, entonces $V^{\perp\perp} = \overline{V}$.
ii) Un conjunto $S \subseteq H$ es total si, y sólo si, $S^{\perp} = \{0\}$.
iii) Un subespacio vectorial $V \subseteq H$ es denso si, y sólo si, $V^{\perp} = \{0\}$.

Demostración i) Usando el teorema 6 resulta $V^{\perp\perp} = \overline{V}^{\perp\perp}$. Ya que $\overline{V} \subseteq H$ es un subespacio completo, al aplicar el teorema anterior obtenemos que $\overline{V}^{\perp\perp} = \overline{V}$. Esto prueba lo afirmado.

ii) Empleando el teorema 6 se obtiene

$$S^{\perp} \ = \ \langle S\rangle^{\perp} \ = \ \overline{\langle S\rangle}^{\perp}. \quad (4.20)$$

Supongamos primero que S es total. Entonces, de la igualdad anterior se obtiene que $S^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$.

Supongamos ahora que $S^{\perp} = \{0\}$. De acuerdo con (4.20), esto implica $\overline{\langle S\rangle}^{\perp} = \{0\}$. Luego, por iv) del teorema anterior se cumple

$$\overline{\langle S\rangle} = \overline{\langle S\rangle}^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = H.$$

Lo cual indica que S es total.

iii) Basta notar que un subespacio vectorial $V \subseteq H$ es denso en H si, y sólo si, es total, y después utilizar ii) con $S = V$. $\square$

4.3. Series de Fourier

A continuación H siempre es un espacio pre-Hilbert.

Un conjunto no-vacío $S \subseteq H$ es un *sistema ortogonal*, si $x \neq 0, \forall\, x \in S$, y

$$\langle x, y\rangle = 0,\ \forall\, x, y \in S,\ x \neq y.$$

Si además $\langle x, x\rangle = 1, \forall\, x \in S$, lo llamaremos *sistema ortonormal.*

Haciendo los cálculos correspondientes se obtienen los próximos dos resultados.

Ejemplo 4. El sistema canónico $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal en $\ell^2(\mathbb{K})$.

Ejemplo 5. Denotemos por C_2 al espacio vectorial $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ con el producto escalar $\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}$. Llamaremos *sistema trigonométrico* a la colección de funciones

$$\mathcal{S} := \{\cos nx\ : n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\} \bigcup \{\operatorname{sen} mx\ : m \in \mathbb{N}\}.$$

Haciendo los cálculos correspondientes, resulta que el sistema trigonométrico es un sistema ortogonal en C_2.

Lema 5. *Sea $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ un sistema ortogonal.*
i) Si $\{a_n\} \subseteq \mathbb{K}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 0$, entonces $a_n = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
ii) El sistema S es linealmente independiente.

Demostración i) Tomemos $\sigma_N = \sum_{j=1}^{N} a_j x_j, \forall N \in \mathbb{N}$, y fijemos $n \in \mathbb{N}$. Usando la continuidad del producto escalar y teniendo presente que $\langle x_j, x_n \rangle = 0$ cuando $j \neq n$, resulta

$$0 = \langle 0, x_n \rangle = \lim_{N\to\infty} \langle \sigma_N, x_n \rangle = a_n \|x_n\|^2.$$

Se sigue que $a_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) Debemos probar que cualquier subconjunto A de S que es no-vacío y finito, es linealmente independiente. Sin pérder de generalidad consideraremos que $A = \{x_1, \ldots, x_N\}$, para algún $N \in \mathbb{N}$. Supongamos entonces que $a_1, \ldots a_N \in \mathbb{K}$ y $\sum_{n=1}^{N} a_n x_n = 0$. Tomando $a_n = 0$ para $n > N$ podemos ahora aplicar i) para concluir que $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. En particular $a_1 = \cdots = a_N = 0$. □

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $e_1, \ldots, e_n$ son vectores ortonormales, es decir forman un sistema ortonormal en el espacio pre-Hilbert H. Llamemos V al espacio generado por estos vectores. Siendo de dimensión finita, el espacio normado V es completo y, en consecuencia, está definida la proyección ortogonal P de H sobre V. A continuación describiremos a P mediante la base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V.

Consideremos $x \in H$. Ya que $Px \in V$, existen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$Px = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n.$$

Sea $j = 1, \ldots, n$. Para encontrar a_j usaremos que $\langle x - Px, e_j \rangle = 0$. Lo cual equivale a $\langle \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, e_j \rangle = \langle Px, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle$. Ya que los vectores e_k son ortonormales, se sigue entonces que

$$a_j = \langle x, e_j \rangle, \ j = 1, \ldots, n.$$

Se obtiene así el siguiente resultado.

Lema 6. *Sean $e_1, \ldots, e_n$ vectores ortonormales en H. Entonces la proyección ortogonal P de H sobre el espacio generado $V = \langle \{e_1, \ldots, e_n\} \rangle$, satisface que*

$$Px \ = \ \langle x, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_n \rangle e_n, \ \forall x \in H.$$

Luego

$$\|x\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|Px\|^2, \ \forall x \in H. \tag{4.21}$$

y

$$d(x, V)^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} | \ \langle x, e_j \rangle \ |^2, \ \forall x \in H. \tag{4.22}$$

Notas
Clase 25, mayo 15, 2023
Fernando Galaz Fontes