El lema anterior motiva la próxima definición.

Definición 7. Sea $S = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ un sistema ortonormal. El n-ésimo *coeficiente de Fourier* de $x \in H$ (con respecto a S) es

$$\langle x, e_n \rangle, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Asímismo, llamaremos *serie de Fourier* de x a la serie, por ahora formal,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n. \tag{4.23}$$

Teorema 8. *Si $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal en H, entonces:*
i) Se cumple la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \ \leq \ \|x\|^2, \ \forall\, x \in H,$$

llamada desigualdad de Bessel. *Esta implica que $\{\langle x, e_n \rangle\} \in \ell^2(\mathbb{K}), \ \forall\, x \in H$.*
ii) Si H es completo, entonces la serie de Fourier (4.23) de cada $x \in H$ converge y tomando $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$, resulta $\langle x, e_n \rangle \ = \ \langle x_0, e_n \rangle, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demostración Fijemos $x \in H$. i) De (4.22) resulta

$$\sum_{n=1}^{N} | \ \langle x, e_n \rangle \ |^2 \leq \ \|x\|^2.$$

Haciendo ahora $N \to \infty$ se obtiene la desigualdad de Bessel.

ii) La convergencia de la e serie de Fourier (4.23) de x se estableció en el ejercicio 12.10.

Tomemos ahora $x_0 := \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$. Por la continuidad del producto escalar y ya que $\{e_n\}$ es un sistema ortonormal, se cumple

$$\begin{aligned} \langle x_0, e_m \rangle \ &= \ \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, e_m \right\rangle \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_m \rangle \\ &= \ \langle x, e_m \rangle, \ \forall\, m \in \mathbb{N}. \ \square \end{aligned}$$

Usando nuevamente el ejercicio 12.10 llegamos al siguiente resultado.

Corolario 3. *Sea $\{f_n\} \subseteq H$ un sistema ortonormal. Si H es completo y $\{a_n\} \subseteq \ell^2(\mathbb{K})$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ converge.*

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

A continuación mostraremos que el proceso usado para obtener los coeficientes de Fourier de un elemento, también permite cambiar una colección numerable (finita o contable) de vectores linealmente independientes por una colección ortonormal y además de manera que los espacios generados por ambas colecciones coincidan.

Teorema 9. *Sean $N = 2, \dots, \infty$ y $S = \{x_n : \ 1 \le n < N\} \subseteq H$ un sistema linealmente independiente, esto es, S puede ser finito o contable. Entonces existe un sistema ortonormal $S_0 = \{e_n : \ 1 \le n < N\}$ tal que:*
i) Cada e_n se expresa en la forma

$$e_n = a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n, \quad \textit{donde } a_{n,n} \neq 0.$$

ii) Cada x_n se expresa en la forma

$$x_n = b_{n,1}e_1 + \cdots + b_{n,n}e_n, \quad \textit{donde } b_{n,n} \neq 0.$$

En particular, los sistemas S y S_0 generan el mismo espacio.

Demostración Puesto que $x_1 \neq 0$, al normalizarlo se obtiene el primer elemento:

$$e_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}.$$

Notemos que se cumplen i) y ii) para $n = 1$.

Enseguida consideremos la proyección ortogonal P_1 de H sobre $\langle\{e_1\}\rangle$. Elijamos después

$$v_2 := x_2 - P_1(x_2).$$

Ya que x_1, x_2 son linealmente independientes, se sigue que $v_2 \neq 0$. Además, $v_2 \perp e_1$. Normalizando a v_2 obtenemos el siguiente elemento:

$$e_2 := \frac{x_2 - P_1x_2}{\|x_2 - P_1x_2\|}.$$

Notemos que e_1 y e_2 son ortonormales y se cumplen i) y ii) para $n = 2$.

En general, supongamos que $e_1, \dots, e_k$ forman un sistema ortonormal y que se cumplen i) y ii). Sea P_k la proyección ortogonal de H sobre $\langle\{e_1, \dots, e_k\}\rangle$ y elijamos a continuación

$$v_{k+1} := x_{k+1} - P_kx_{k+1}.$$

Puesto que $x_{k+1},\ x_1, \ldots, x_k$ son linealmente independientes, se cumple que $v_{k+1} \neq 0$. Además, $v_{k+1} \perp e_1, \ldots, e_k$. Normalizando v_{k+1} obtenemos el siguiente elemento:

$$e_{k+1} := \frac{x_{k+1} - P_k x_{k+1}}{\|x_{k+1} - P_k x_{k+1}\|}.$$

Notemos ahora que $e_1, e_2, \ldots, e_{k+1}$ son ortonormales y se cumplen i) y ii) para $n = k + 1$. Esto prueba lo afirmado. $\square$

Base Ortonormal

Ejemplo 6. Sea $B := \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ el sistema ortonormal canónico en $\ell^2(\mathbb{K})$ y consideremos el sistema ortonormal $S = B \setminus \{e_1\}$. Ya que los coeficientes de Fourier de e_1 respecto a S son todos 0, resulta $\sum_{n=2}^{\infty} \langle e_1, e_n \rangle e_n = 0$. Así, e_1 no se obtiene de su serie de Fourier respecto de S.

Analizaremos ahora qué propiedad debe tener un sistema ortonormal para que cada elemento $x \in H$ coincida con su correspondiente serie de Fourier.

Definición 8. Sea H un espacio pre-Hilbert. A un sistema ortonormal $S \subseteq H$ que es total, lo llamaremos *base ortonormal* de H.

Ejemplo 7. En la prueba de la proposición 2.11 establecimos que el sistema canónico $B = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es total en ℓ^2. Así, B es una base ortonormal de ℓ^2. Además, el n-ésimo coeficiente de Fourier de $x = \{a_n\} \in \ell^2$ es $\langle x, e_n \rangle = a_n$.

Teorema 10. *Sea $S = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ un sistema ortonormal. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) S es base ortonormal de H.

ii) Cada $x \in H$ se puede expresar por su serie de Fourier, es decir

$$x \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \tag{4.24}$$

donde la convergencia de la serie es de acuerdo a la norma en H.

iii) Para cada $x \in H$ se cumple la igualdad de Parseval*:*

$$\|x\|^2 \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \mid \langle x, e_n \rangle \mid^2 .$$

iv) Si H es completo, entonces las propiedades anteriores equivalen a que $S^{\perp} = \{0\}$.

Demostración i) $\Longrightarrow$ ii). Fijemos $x \in H$ y tomemos

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j, \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.25}$$

Para probar que $s_n \to x$, consideremos $\epsilon > 0$. Siendo S total, existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{N} c_j e_j \right\| \leq \epsilon,$$

donde $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{K}$. Sea $n > N$ y denotemos por V_n el espacio generado por los vectores $e_1, \ldots, e_n$. Puesto que s_n es la proyección ortogonal de x sobre V_n y $\sum_{j=1}^{N} c_j e_j \in V_n$, se sigue que

$$\|x - s_n\| \ \leq \ \left\| x - \sum_{j=1}^{N} c_j e_j \right\| \ \leq \ \epsilon, \ \forall\, n > N.$$

ii) $\Longrightarrow$ i). Sea $x \in H$ y tomemos s_n como en (4.25). La hipótesis indica que $x = \lim_{n\to\infty} s_n$. Ya que cada $s_n \in \langle S \rangle$, concluimos que $\langle S \rangle$ es denso en H.

ii) $\Longleftrightarrow$ iii) Sea $x \in H$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos s_n como en (4.25). Entonces, de acuerdo con (4.22), se satisface

$$\|x - s_n\|^2 \ = \ \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \|x - s_n\| = 0 \Longleftrightarrow \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle^2 \ = \ 0.$$

Esto prueba lo deseado.

iv) La equivalencia con i) se probó en ii) del corolario 2. $\square$

Observación 4. Consideremos una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio normado X. Dada una biyección $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\Phi(n)}$ la llamaremos *rearreglo* de la serie original. Cuando todos los rearreglos de una serie converjan a un mismo vector, diremos que la serie en cuestión *converge incondicionalmente*.

Supongamos que $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert H. Dada una biyección $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, notemos también que el sistema $\{e_{\Phi(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ es base ortonormal de H. Luego, se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_{\Phi(n)} \rangle e_{\Phi_n}.$$

Esto muestra que una serie de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ converge incondicionalmente a x .

Del teorema anterior podemos apreciar que el tener una base ortonormal contable en un espacio de Hilbert permite representar a sus elementos de manera similar al caso en que se cuenta con una base. Estableceremos enseguida que cada espacio de Hilbert separable posee una base ortonormal numerable.

Lema 7. *Sean V un espacio vectorial y $S := \{v_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$. Si $\langle S \rangle \neq \{0\}$, entonces existe $S_0 \subseteq S$ tal que S_0 es linealmente independiente y $\langle S_0 \rangle = \langle S \rangle$.*

Demostración Empecemos la construcción eligiendo como $n(1)$ el menor índice n tal que $v_n \neq 0$. Definamos después $w_1 = v_{n(1)}$ y observemos que

$$\langle \{w_1\} \rangle = \langle \{v_1, \ldots, v_{n(1)}\} \rangle.$$

Si $\dim\langle S \rangle = 1$, eligiendo $S_0 = \{w_1\}$ resulta $\langle S_0 \rangle = \langle S \rangle$.

Supongamos ahora que $\dim\langle S \rangle > 1$ y escojamos como $n(2)$ el menor natural n tal que $n > n(1)$ y w_1, v_n son linealmente independientes. Definamos después $w_2 := v_{n(2)}$ y observemos que

$$\langle \{w_1, w_2\} \rangle = \langle \{v_1, \ldots, v_{n(1)}, \ldots, v_{n(2)}\} \rangle.$$

Si $\dim\langle S \rangle = 2$, tomando $S_0 = \{w_1, w_2\}$ se cumple lo requerido. Si ocurre que $\dim\langle S \rangle > 2$ repetimos la construcción anterior y se presentan entonces dos posibilidades.

Cuando $\dim\langle S \rangle < \infty$ se obtiene un conjunto $S_0 = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\} \subseteq S$ que es base de $\langle S \rangle$, pues es linealmente independiente y $\langle S_0 \rangle = \langle S \rangle$.

Por otra parte, en el caso en que $\dim\langle S \rangle = \infty$ obtenemos un conjunto $S_0 = \{w_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq S$ que es linealmente independiente y tal que

$$\langle \{w_1, w_2, \ldots, w_k\} \rangle = \langle \{v_1, \ldots, v_{n(1)}, \ldots, v_{n(k)}\} \rangle, \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

De esto se sigue que $\langle S_0 \rangle = \langle S \rangle$. $\square$

Notas
Clase 26, mayo18, 2023
Fernando Galaz Fontes