Proposición 2. *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces H es separable si, y sólo si, H posee una base ortonormal numerable.*

Demostración Supongamos primero que H posee una base ortonormal numerable, digamos B. Así, B es un subconjunto de H que es total y numerable. Usando ahora el lema 2.18 concluimos que H es separable.

Supongamos ahora que H es separable y sea $S = \{v_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ un subconjunto denso. Usando el lema anterior reemplazamos S por un conjunto S_0 que es linealmente independiente y $\langle S \rangle = \langle S_0 \rangle$. Ya que S_0 es finito o infinito, lo expresamos en la forma $S_0 = \{w_n : \ 1 \leq n < N\} \subseteq S$, donde $N = 2, \ldots, \infty$. Sea $B = \{e_n : \ 1 \leq n < N\}$ el sistema ortonormal que se obtiene aplicando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a S_0. Puesto que $\langle B \rangle = \langle S_0 \rangle$, el sistema B es total y, por lo tanto, es base ortonormal de H. $\square$

Definición 9. Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert.
a) Un operador lineal $U : H_1 \to H_2$ es *unitario*, si es un isomorfismo y preserva el producto escalar, esto es

$$\langle Ux, Uy \rangle_2 \;=\; \langle x, y \rangle_1, \ \forall\, x, y \in H_1. \tag{4.26}$$

b) Diremos que H_1 y H_2 son *isomorfos como espacios de Hilbert*, si existe un operador unitario $U : H_1 \to H_2$.

Observación 5. Supongamos que $U : H_1 \to H_2$ es un operador unitario.
1. De (4.26) se sigue entonces que

$$\|Ux\| = \|x\|, \ \forall\, x \in H_1,$$

Así, U es una isometría y, consecuentemente ,U es acotado. Por otra parte, al ser una ismometría la condición de que U sea inyectivo es redundante.
2. Notemos que $U^{-1} : H_2 \to H_1$ también es un operador unitario.

El siguiente resultado indica que, básicamente, $\ell^2(\mathbb{K})$ es el único espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ que es separable y de dimensión infinita.

Teorema 11 (Riesz-Fischer)**.** *Sea H un espacio de Hilbert separable.*
i) Si $\dim H = \infty$*, entonces H es isomorfo como espacio de Hilbert a $\ell^2(\mathbb{K})$.*
ii) Si $\dim H = n < \infty$*, entonces H es isomorfo como espacio de Hilbert a $\mathbb{K}^n$.*

Demostración Nada más escribiremos la prueba de i). Con ii) podemos proceder en la misma forma; la diferencia es prácticamente en la notación. Tomemos $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{K})$.

Ya que H es un espacio de Hilbert separable y $\dim H = \infty$, la proposición anterior indica que H tiene una base ortonormal $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, con la cual trabajaremos en el resto de la prueba.

Para cada $x \in H$ definamos ahora la sucesión

$$U(x) := \{\langle x, f_n\rangle\}_n.$$

La desigualdad de Bessel establece que $U(x) \in \ell^2$, por lo cual $U : H \to \ell^2$. A partir de las propiedades del producto escalar, resulta directamente que U es lineal. Para establecer que U es suprayectivo, consideremos una sucesión $\{a_n\} \subseteq \ell^2$ y sea $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n, \forall\, N \in \mathbb{N}$. Ya que H es completo, el corolario 3 indica que existe

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n = \lim_{N\to\infty} s_N.$$

Ahora, por la continuidad del producto escalar y puesto que $\{f_n\}$ es un sistema ortonormal, resulta

$$\langle x, f_k\rangle \;=\; \lim_{N\to\infty} \langle S_N, f_k\rangle \;=\; a_k,\;\; \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Esto muestra que $U(x) = \{a_n\}$ y, por consiguiente, U es suprayectivo.

Finalmente, veamos que U preserva el producto escalar. Sean $x, y \in H$. Utilizando primero la continuidad del producto escalar, después que $\{f_n\}$ es una base ortonormal, y finalmente que $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, f_n\rangle$ y $y = \sum_{n=1}^{\infty}\langle y, f_n\rangle$ resulta

$$\begin{aligned}
\langle Ux, Uy\rangle_{\ell^2} &= \langle \{\langle x, f_n\rangle\}, \{\langle y, f_n\rangle\}\rangle_{\ell^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, f_n\rangle \overline{\langle y, f_n\rangle} \;=\; \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x, f_n\rangle \overline{\langle y, f_n\rangle} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle x, f_n\rangle f_n, \sum_{j=1}^{N} \langle y, f_j\rangle f_j \right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x, f_n\rangle f_n, \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \langle y, f_j\rangle f_j \right\rangle \;=\; \langle x, y\rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

4.4. Espacio dual de un espacio de Hilbert

Dado un espacio normado X, resulta conveniente tener una representación familiar de los elementos en su espacio dual $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$. Por ejemplo, esto es lo que se hace cuando "identificamos"$(\mathbb{K}^N)^*$ con $\mathbb{K}^N$. En general, se busca encontrar algún espacio de Banach "conocido" Y y una biyección $J : Y \to X^*$, que sea isométrica y, de ser posible, lineal. A continuación analizaremos el caso en que la norma de X proviene de un producto escalar.

Consideremos un espacio pre-Hilbert H y denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su producto escalar. Para cada $x \in H$, definamos el funcional $Rx : H \to \mathbb{K}$ por

$$Rx(y) := \langle y, x \rangle. \tag{4.27}$$

Observemos que Rx es lineal. A partir de la desigualdad de Schwarz, resulta $|Rx(y)| \le \|y\| \, \|x\|, \ \forall\, y \in H$. Lo cual indica que

$$\|Rx\| \ \le \ \|x\|. \tag{4.28}$$

Si $x = 0$, de (4.27) es claro que $Rx = 0$. Supongamos que $x \neq 0$. Entonces a partir de la igualdad $|Rx(x)| \ = \ \|x\|^2$ se sigue que $\|Rx\| \ge \|x\|$. Junto con (4.28), esto nos lleva a concluir que

$$\|Rx\| \ = \ \|x\|, \ \forall\, x \in H. \tag{4.29}$$

Lo anterior establece que $Rx \in H^*, \forall\, x \in H$. Obtenemos así un operador $R : H \to H^*$, al cual llamaremos *de representación de Riesz*. Las siguientes características de R son consecuencia directa de las propiedades del producto escalar en H.

Lema 8. *Sea H un espacio pre-Hilbert. El operador de representación de Riesz R satisface:*
i) $R(x + w) = Rx + Rw, \ \forall\, x, w \in H$.
ii) $R(cx) = \bar{c}Rx, \ \forall\, c \in \mathbb{K}, x \in H$.

Del lema anterior y (4.29) se sigue que $R : H \to H^*$ es una isometría, aunque en el caso complejo no es lineal. Cuando H es completo, mostraremos enseguida que R es suprayectiva.

Teorema 12 (de representación de Riesz)**.** *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces, para cada funcional $\varphi \in H^*$ existe un único elemento $x \in H$ tal que $Rx = \varphi$, esto es*

$$\varphi(y) \ = \ \langle y, x \rangle, \ \forall\, y \in H. \tag{4.30}$$

Además, $\|\varphi\| = \|x\|$.

Demostración Sea $\varphi \in H^*$. Si $\varphi = 0$, tomando $x = 0$ se cumple (4.30). En adelante supondremos que $\varphi \neq 0$.

Para proponer el vector $x \in H$ que represente a φ, consideremos la condición (4.30). Tomemos $N = N(\varphi)$. Si $y \in N$, entonces dicha condición indica que $\langle y, x \rangle = 0$. Así pues el elemento x que buscamos deberá encontrarse en $N^\perp$. Veamos primero que $\dim N^\perp = 1$.

Puesto que H es completo, expresemóslo como $H = N \oplus N^\perp$. Ya que $N \subsetneqq H$, existe $x_0 \in N^\perp$ tal que $x_0 \neq 0$. Sin perder generalidad, supondremos que $\|x_0\| = 1$. Observemos que $\varphi(x_0) \neq 0$.

Sea $y \in N^\perp$. Luego $\varphi\left(y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_0)} x_0\right) = 0$, esto es $y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_0)} x_0 \in N$. Puesto que $y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_0)} x_0$ también pertenece a $N^\perp$, concluimos que $y = \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_0)} x_0$.

De acuerdo a lo anterior, el elemento $x \in N^\perp$ que se busca debe ser de la forma $x = cx_0$, donde $c \neq 0$. Para encontrar c notemos que debe cumplirse

$$\varphi(x) \ = \ \langle x, x \rangle \ \Leftrightarrow c\,\varphi(x_0) \ = \ c\,\bar{c}.$$

Lo cual se logra tomando $c = \overline{\varphi(x_0)}$. En resumen, proponemos

$$x = \overline{\varphi(x_0)} x_0.$$

Resta mostrar que efectivamente se cumple (4.30). Dado $y \in H$, expresémoslo en la forma $y = c\,x_0 + n$, donde $c \in \mathbb{K}$ y $n \in N$. Entonces

$$\varphi(y) = c\,\varphi(x_0) = c\,\langle x_0, \overline{\varphi(x_0)} x_0 \rangle = \langle c\,x_0 + n, \overline{\varphi(x_0)} x_0 \rangle \ = \ \langle y, x \rangle. \ \square$$

Notas
Clase 27, mayo 22, 2023
Fernando Galaz Fontes