Operador adjunto

A continuación G y H denotarán espacios de Hilbert.

Fijemos $T \in \mathcal{L}(G, H)$ y para cada $y \in H$ consideremos el funcional

$$x \mapsto \langle Tx, y\rangle.$$

Claramente este funcional es lineal, y es acotado pues

$$|\langle Tx, y\rangle| \;\leq\; \|T\|\,\|x\|\,\|y\|,\ \forall\, x \in G.$$

Esto permite aplicar el teorema de representación de Riesz para obtener un único elemento $w \in G$ que cumple

$$\langle Tx, y\rangle \;=\; \langle x, w\rangle,\ \forall\, x \in G.$$

Definimos entonces la función $T^* : H \to G$ por $T^*y := w$. Se sigue directamente de las propiedades de los productos escalares en G y en H que T^* es lineal. A este operador T^* lo llamaremos *adjunto* de T. Notemos que T^* queda determinado por la condición

$$\langle Tx, y\rangle \;=\; \langle x, T^*y\rangle,\ \forall\, x \in G,\, y \in H. \tag{4.31}$$

Tomando conjugado, notemos que lo anterior se expresa como

$$\langle y, Tx\rangle \;=\; \langle T^*y, x\rangle,\ \forall\, x \in G, y \in H.$$

Ejemplo 8. Adjunto del operador identidad

Sea $I : H \to H$ el operador identidad. Luego, para cada $y \in H$, se cumple

$$\langle Ix, y\rangle \;=\; \langle x, y\rangle \;=\; \langle x, Iy\rangle,\ \forall\, x \in H.$$

Esto señala que $I^*y = y,\ \forall\, y \in H$. Así $I^* = I$.

Ejemplo 9. Adjunto de un operador unitario

Sea $U : G \to H$ un operador unitario. Puesto que U es un isomorfismo y preserva el producto escalar, para cada $y \in G$ resulta

$$\langle Ux, y\rangle \;=\; \langle Ux, UU^{-1}y\rangle \;=\; \langle x, U^{-1}y\rangle,\ \forall\, x, y \in G.$$

Luego, $U^* = U^{-1}$.

Recíprocamente, sea U un isomorfismo acotado y $U^* = U^{-1}$. Entonces

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, y\rangle,\ \forall\, x, y \in G.$$

Así, U es unitario.

A continuación resumimos las propiedades básicas del operador adjunto.

Teorema 13. *Sean G, H y K espacios de Hilbert. Entonces:*

i) $T^* \in \mathcal{L}(H,G)$ *y* $\|T\| = \|T^*\|, \quad \forall\, T \in \mathcal{L}(G,H)$.

ii) $(S+T)^* = S^* + T^*, \ (cT)^* = \overline{c}T^*, \quad \forall\, S, T \in \mathcal{L}(G,H), c \in \mathbb{K}$.

iii) $(ST)^* = T^*S^*, \quad \forall\, T \in \mathcal{L}(G,H), S \in \mathcal{L}(H,K)$.

iv) $T^{**} = T, \quad \forall\, T \in \mathcal{L}(G,H)$.

Demostración i) Sea $T \in \mathcal{L}(G,H)$ y tomemos $y \in H$. Usando (4.31), la desigualdad de Schwarz y la desigualdad multiplicativa resulta entonces

$$\|T^*y\|^2 = \langle T^*y, T^*y\rangle = \langle TT^*y, y\rangle \leq \|TT^*y\|\|y\| \leq \|T\|\|T^*y\|\|y\|.$$

Esto implica que $\|T^*y\| \leq \|T\|\|y\|, \forall\, y \in H$ y, por lo tanto, $\|T^*\| \leq \|T\|$. En particular, $T^* \in \mathcal{L}(H,G)$.

Para establecer que $\|T\| \leq \|T^*\|$, y así terminar esta prueba, procedemos de forma análoga a la anterior. Tomemos $x \in G$. Entonces

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle \leq \|x\|\|T^*Tx\| \leq \|x\|\|T^*\|\|Tx\|.$$

De lo cual obtenemos que $\|T\| \leq \|T^*\|$.

ii) Consideremos $S, T \in \mathcal{L}(G,H)$ y tomemos $x \in G, y \in H$. Entonces

$$\langle (S+T)x, y\rangle = \langle Sx, y\rangle + \langle Tx, y\rangle = \langle x, S^*y\rangle + \langle x, T^*y\rangle = \langle x, S^*y + T^*y\rangle.$$

Esto indica que $(S+T)^* = S^* + T^*$.

Similarmente, para $c \in \mathbb{K}$ se cumple

$$\langle cTx, y\rangle = c\langle x, T^*y\rangle = \langle x, \overline{c}T^*y\rangle, \ \forall\, x \in G, y \in H.$$

Así, $(c\,T)^* = \overline{c}T^*$.

iii) Tomemos $T \in \mathcal{L}(G,H)$ y $S \in \mathcal{L}(H,K)$. Entonces

$$\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle, \ \forall\, x \in G, y \in K.$$

Por lo tanto $(ST^*) = T^*S^*$.

iv) Sea $T \in \mathcal{L}(G,H)$. Entonces

$$\langle T^*x, y\rangle = \overline{\langle y, T^*x\rangle} = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle x, Ty\rangle, \ \forall\, x \in H, y \in G.$$

Lo cual señala que $T^{**} = T$. $\square$

Los siguientes resultados muestran que las propiedades de un operador adjunto T^* resultan estar estrechamente ligadas con las de $T \in \mathcal{L}(G,H)$.

Corolario 4. *Sea* $T \in \mathcal{L}(G,H)$. *Entonces* $T : G \to H$ *es un isomorfismo si, y sólo si,* $T^* : H \to G$ *también lo es. Además* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Demostración Supongamos primero que $T : G \to H$ es un isomorfismo. Denotemos por I_G el operador identidad en G y por I_H el operador identidad en H. Ya que T es continuo, el teorema del mapeo abierto indica que T^{-1} también lo es. Puesto que $T \circ T^{-1} = I_H$ y $T^{-1} \circ T = I_G$, al tomar adjunto, usar iii) del teorema anterior y tener presente que $I_H^* = I_H$ y $I_G^* = I_G$, obtenemos

$$(T^{-1})^* \circ T^* = I_H \quad \text{y} \quad T^* \circ (T^{-1})^* = I_G.$$

De estas igualdades se sigue que $T^* : H \to G$ es un isomorfismo y que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Supongamos ahora que T^* es un isomorfismo. Usando ahora el teorema anterior y lo probado primero, concluimos que $T = T^{**}$ es un isomorfismo. □

El siguiente resultado precisa cómo se relacionan el rango de $T \in \mathcal{L}(G,H)$ con el núcleo de T^* y, recíprocamente, el núcleo de T con el rango de T^*.

Lema 9. *Sea* $T \in \mathcal{L}(G,H)$. *Entonces:*

i) $R(T)^\perp = N(T^*)$. *Luego* $R(T) \subseteq H$ *es denso si, y sólo si,* T^* *es 1-1.*

ii) $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp$.

iii) $N(T) = R(T^*)^\perp$.

Demostración i) Sea $y \in H$. Entonces

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \ \forall\, x \in G. \tag{4.32}$$

Si $y \in R(T)^\perp$, de (4.32) se sigue que $\langle x, T^*y\rangle = 0, \forall\, x \in G$. Lo cual implica que $T^*y = 0$, esto es $y \in N(T^*)$. Supongamos ahora que $y \in N(T^*)$. De (4.32) es claro entonces que $y \in R(T)^\perp$.

Finalmente, observemos que el corolario 2 indica que la densidad de $R(T)$ corresponde a que $R(T)^\perp = \{0\}$. Por la igualdad que acabamos de establecer esto equivale a que $N(T^*) = \{0\}$.

ii) Tomando complemento ortogonal en la igualdad $R(T)^\perp = N(T^*)$ resulta $\overline{R(T)} = R(T)^{\perp\perp} = N(T^*)^\perp$.

iii) Basta aplicar i) a T^* en lugar de T. □

El siguiente resultado es de interés por la importancia de que el rango de un operador lineal continuo sea cerrado.

Teorema 14. *Sea $T \in \mathcal{L}(G, H)$. Entonces $R(T)$ es cerrado si, y sólo si, $R(T^*)$ es cerrado.*

Demostración Supongamos primero que $R(T)$ es cerrado. Empleando el lema 9 y el corolario 2 encontramos que $N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}$. Usando el teorema de descomposición ortogonal, resulta entonces que $G = N(T) \oplus \overline{R(T^*)}$. Luego $R(T) = T(G) = T(\overline{R(T^*)})$ y, por lo tanto, la restricción

$$S = T : \overline{R(T^*)} \to R(T) \text{ es un isomorfismo.} \tag{4.33}$$

Ya que $\overline{R(T^*)}$ y $R(T)$ son espacios de Banach y S es acotado, el teorema del mapeo abierto indica que $S^{-1} : R(T) \to \overline{R(T^*)}$ es acotado. Luego existe $c > 0$ tal que

$$\|Ty\| \geq c\|y\|, \forall\, y \in \overline{R(T^*)}. \tag{4.34}$$

Por otra parte, empleando el lema 9 y teniendo presente que $R(T)$ es cerrado, resulta que $N(T^*)^\perp = R(T)$. De acuerdo al teorema de descomposición ortogonal, se cumple entonces que $G = N(T^*) \oplus R(T)$. Lo cual implica que $R(T^*) = T^*(G) = T^*(T(G)) = T^*(R(T)$ y por lo tanto

$$S_* = T^* : R(T) \to R(T^*) \text{ es un isomorfismo.} \tag{4.35}$$

De (4.33) y (4.35) resulta que $S_*S : \overline{R(T^*)} \to R(T^*)$ es un isomorfismo acotado. Probaremos ahora que también $(S_*S)^{-1}$ es acotado.

Consideremos $y \in \overline{R(T^*)}$. Aplicando la desigualdad de Schwarz y empleando (4.34) llegamos entonces a que

$$\|S_*Sy\|\,\|y\| = \|T^*Ty\|\,\|y\| \geq |\langle T^*Ty, y\rangle| = |\langle Ty, Ty\rangle| = \|Ty\|^2 \geq c^2\|y\|^2.$$

Esto implica que $\|S_*Sy\| \geq c^2\|y\|, \forall\, y \in \overline{R(T^*)}$ y, en consecuencia, el operador $S_*S : \overline{R(T^*)} \to R(T^*)$ es un isomorfismo topológico. Siendo $\overline{R(T^*)}$ completo, entonces $R(T^*)$ también lo es. Por lo tanto, $R(T^*)$es cerrado.

Supongamos ahora que $R(T^*)$ es cerrado. Aplicando lo que acabamos de probar a T^* se sigue entonces que $R(T) = R(T^{**})$ es cerrado $\square$

Notas
Clase 28, mayo 24, 2023
Fernando Galaz Fontes