Capítulo 5

Dualidad

5.1. Espacio dual

Recordemos que el *espacio dual* de un espacio normado X es

$$X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{K}) = \{\varphi : X \to \mathbb{K},\ \varphi \text{ es lineal y continua}\},$$

con la norma operador correspondiente

$$\|\varphi\| := \sup\{|\varphi x| \colon \|x\| \leq 1\},\ \forall\, \varphi \in X^*.$$

a la cual también llamaremos *norma dual* en X^*.

Ya que $\mathbb{K}$ es un espacio de Banach, el teorema 3.2 indica que X^*, con su norma dual, siempre es un espacio de Banach.

Observación 1. En general, para indicar que una función f toma valores escalares, se dice que f es un *funcional*. Con esta terminología, el espacio dual X^* consiste de todos los funcionales en X que son lineales y acotados.

Ejemplo 1. Consideremos el espacio normado de dimensión finita $X = \mathbb{K}^n$. El corolario 3.2 indica entonces que cualquier funcional lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}$ es continuo. Así

$$(\mathbb{K}^n)^* \ = \ \{\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ \varphi \text{ es lineal } \}.$$

Además, una base de $(\mathbb{K}^n)^*$ está formada por las proyecciones

$$\pi_j(a_1, \ldots, a_n) = a_j,\ j = 1, \ldots, n.$$

Resulta entonces que $(\mathbb{K}^n)^*$ es isomorfo con $\mathbb{K}^n$ y, por lo tanto, $(\mathbb{K}^n)^*$ se puede "identificar"con $\mathbb{K}^n$.

Importancia del espacio dual

Observemos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{K}^n$ es acotado si, y sólo si, A es acotado por componentes, esto es, $\pi_j(A) \subseteq \mathbb{K}$ es acotado, $j = 1, \ldots, n$. Teniendo presente el ejemplo 1, se sigue de aquí que $A \subseteq \mathbb{K}^n$ es acotado si, y sólo si,

$$\varphi(A) \subseteq \mathbb{K} \text{ es acotado, } \forall\, \varphi \in (\mathbb{K}^n)^*.$$

Consideremos ahora un espacio normado arbitrario X y sea $A \subseteq X$ un conjunto acotado. En esta situación ya no tiene sentido hablar de "componentes", pero sí lo tiene el analizar, para cada $\varphi \in X^*$, el conjunto $\varphi(A) \subseteq \mathbb{K}$. De esta forma, podemos decir que al pasar de $\mathbb{K}^n$ a X, el papel de las "componentes"(determinadas en $\mathbb{K}^n$ por las proyecciones π_j) viene a ser tomado por los funcionales $\varphi \in X^*$.

Conviene observar que en esta nueva situación se presentan dos conceptos:

1) $A \subseteq X$ es acotado, si existe $c > 0$ tal que

$$\|x\| \leq c, \ \forall\, x \in A,$$

2) $A \subseteq X$ es *débilmente acotado*, si

$$\varphi(A) \subseteq \mathbb{K} \text{ es acotado, } \forall\, \varphi \in X^*.$$

En general, para cada concepto definido directamente a través de la norma, aparece un concepto *débil* correspondiente, definido mediante los elementos del espacio dual. Surge naturalmente entonces el problema de determinar si el concepto original (o fuerte) coincide con el concepto débil. Como podremos apreciar, esto sucede algunas veces y otras no.

5.2. Teorema de Hahn-Banach y consecuencias

Fijemos un espacio normado X y consideremos un subespacio vectorial $V \subseteq X$ y un funcional lineal acotado $f : V \to \mathbb{K}$. Una cuestión natural es entonces la de analizar si f se puede *extender* linealmente a X sin modificar su norma, esto es, si existe una función lineal $F : X \to \mathbb{K}$ tal que $F = f$ en V y $\|f\| = \|F\|$. El teorema de Hahn-Banach indica que esto siempre es posible. Para su demostración será necesario introducir antes un resultado básico de la teoría de conjuntos.

Lema de Zorn

Definición 1. Un *orden parcial* (o simplemente 'orden') en un conjunto A es una relación, que denotaremos por $\leq$, con las siguientes tres propiedades:
a) Reflexividad: $x \leq x, \ \forall\, x \in A$.
b) Transitividad: $w \leq x, \ x \leq y \implies w \leq y, \ \forall\, w, x, y \in A$.
c) Antisimetría: $x \leq y, \ y \leq x \implies x = y, \ \forall\, x, y \in A$.

Sea $\leq$ un orden parcial en un conjunto A. Para $x, y \in A$ definimos que $x < y$, si $x \leq y$ y $x \neq y$.

Ejemplo 2. Sea D un conjunto. Dadas dos funciones $f, g : D \to \mathbb{R}$ definimos

$$f \leq g \text{ (en } D), \quad \text{si} \quad f(x) \leq g(x), \ \forall\, x \in D.$$

Es sencillo verificar que esta relación es un orden en el espacio de funciones $F(D, \mathbb{R})$.

Ejemplo 3. Sea D un conjunto. Si $A, B \subseteq D$ definimos

$$A \leq B, \quad \text{si} \quad A \subseteq B.$$

Se obtiene así un orden en el conjunto potencia $2^D := \{A : A \subseteq D\}$.

Definición 2. Sea A un conjunto con orden parcial $\leq$.
a) El orden es *lineal* (o *total*) si para cada $x, y \in A$, se cumple $x \leq y$ o $y \leq x$.
b) Si $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$ y la restricción del orden a B es lineal, diremos que B es una *cadena* en A.

Ejemplo 4. En general, ninguno de los órdenes señalados en los ejemplos 2 y 3 es lineal. Por ejemplo, tomemos $D = [0, 1]$ y $f = \chi_{\{0\}}, \ g = \chi_{\{1\}}$. Entonces no se cumple que $f \leq g$ ni que $g \leq f$.

Naturalmente, y como lo haremos enseguida, en un conjunto con un orden parcial podemos considerar conceptos como los que ya conocemos con el orden en $\mathbb{R}$.

Definición 3. Sean A un conjunto, $\leq$ un orden parcial en A y $B \subseteq A$.
a) Un elemento $c \in A$ es *cota superior* de B, si $x \leq c, \ \forall\, x \in B$.
b) Un elemento $c \in A$ es *elemento máximo* de B, si $c \in B$ y $x \leq c, \ \forall\, x \in B$.
c) Un elemento $c \in A$ es *elemento maximal* en B, si $c \in B$ y no existe $b \in B$ tal que $c < b$.

Con las modificaciones correspondientes, se definen los conceptos de *cota inferior*, *elemento mínimo* y *elemento minimal*.

Observemos que si c es un elemento máximo de B, entonces c es un elemento maximal. Enseguida se muestra que el recíproco no es cierto.

Ejemplo 5. Para visualizar un orden resulta útil considerar diagramas como el siguiente, donde $x \leq y$ equivale a que x esté a la izquierda de y o a que x esté debajo de y, y además x y y deben poderse conectar mediante segmentos en la misma "dirección".

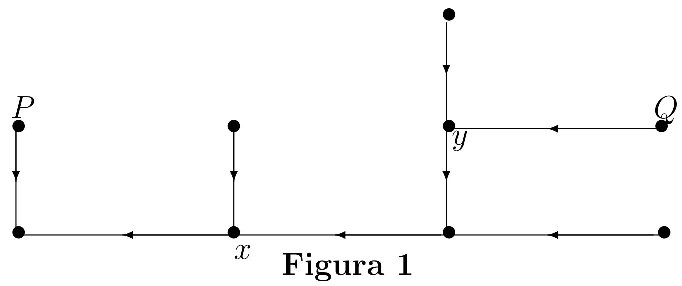

Figura 1

En el caso del orden descrito por la figura anterior, notemos que P y Q son elementos maximales y ninguno de ellos es elemento máximo.

Ejemplo 6. Consideremos el ejemplo 2, siendo $D \neq \emptyset$. Dada cualquier función $f : D \to \mathbb{R}$, entonces $g = f + 1$ satisface $f < g$. Esto muestra que en $F(D, \mathbb{R})$ no hay elementos maximales.

Ejemplo 7. Consideremos ahora el ejemplo 3. En este caso, D es el elemento máximo de 2^D y $\emptyset$ es el elemento mínimo.

Podemos ya enunciar el resultado de la teoría de conjuntos que requerimos y que supondremos válido.

Lema 1 (de Zorn)**.** *Sea A un conjunto no-vacío y parcialmente ordenado. Si cualquier cadena en A está acotada superiormente, entonces A tiene un elemento maximal.*

A continuación empezaremos a establecer el teorema de Hahn-Banach, otro de los resultados básicos en análisis funcional. Lo desarrollaremos de una manera bastante general, usando una seminorma en lugar de una norma.

Lema 2. *Sean X un espacio vectorial real y $\rho : X \to \mathbb{R}$ una seminorma. Si $W \subsetneqq X$ es un subespacio vectorial, $g : W \to \mathbb{R}$ es lineal y $|g| \leq \rho$ en W, entonces existen un subespacio vectorial $\widetilde{W} \subseteq X$ y un funcional lineal $\tilde{g} : \widetilde{W} \to \mathbb{R}$ tales que $W \subsetneqq \widetilde{W}$, $\tilde{g} = g$ en W y $|\tilde{g}| \leq \rho$ en $\widetilde{W}$.*

Demostración Fijemos $x_0 \in X \setminus W$ y consideremos

$$\widetilde{W} = W + \{kx_0 : k \in \mathbb{R}\}.$$

Puesto que nos interesa que $\tilde{g} : \widetilde{W} \to \mathbb{R}$ sea lineal, definimos

$$\tilde{g}(w + kx_0) = g(w) + kc,$$

donde debemos proponer $c = \tilde{g}(x_0) \in \mathbb{R}$ para cumplir lo requerido.

Ya que $W \cap \langle \{x_0\} \rangle = \{0\}$, la función $\tilde{g}$ está bien definida; claramente $\tilde{g}$ es lineal y es una extensión de g. Esto se cumple con cualquier $c \in \mathbb{R}$ y la dificultad consiste en elegir c de manera que $|\tilde{g}| \leq \rho$ en $\widetilde{W}$.

Para tal c debe satisfacerse entonces la desigualdad

$$|g(w) + kc| \;\leq\; \rho(w + kx_0),\ \forall\, w \in W, k \neq 0.$$

La cual equivale a

$$\left| g\left(\frac{w}{k}\right) + c \right| \;\leq\; \rho\left(\frac{w}{k} + x_0\right),\ \forall\, w \in W, k \neq 0.$$

Ya que W es un subespacio vectorial, la desigualdad anterior equivale a

$$|g(w_1) + c| \;\leq\; \rho(w_1 + x_0),\ \forall\, w_1 \in W,$$

y esta desigualdad se puede expresar como

$$-\rho(w_1 + x_0) - g(w_1) \;\leq\; c \;\leq\; \rho(w_1 + x_0) - g(w_1),\ \forall\, w_1 \in W. \tag{5.1}$$

Esto motiva a tratar de determinar si

$$-\rho(w_1 + x_0) - g(w_1) \;\leq\; \rho(w_2 + x_0) - g(w_2),\ \forall\, w_1, w_2 \in W. \tag{5.2}$$

Lo cual resulta de observar que si $w_1, w_2 \in W$, entonces

$$g(w_2) - g(w_1) = g(w_2 - w_1) \leq \rho(w_2 - w_1) \leq \rho(w_2 + x_0) + \rho(w_1 + x_0).$$

Sean $A = \{-\rho(w_1 + x_0) - g(w_1) : w_1 \in W\}$ y $B = \{\rho(w_2 + x_0) - g(w_2) : w_2 \in W\}$. Entonces , de (5.2) se sigue que $\sup A, \inf B \in \mathbb{R}$ y $\sup A \leq \inf B$. Tomando $c \in [\sup A, \inf B]$ se obtiene (5.1). □

Notas
Clase 29, mayo 29, 2023
Fernando Galaz Fontes