Consideremos ahora un operador lineal $T : V \to W$ que sea suprayectivo. Sean $w_1, \dots, w_n \in W$ vectores linealmente independientes. Usando que T es suprayectivo, elijamos $v_1, \dots, v_n \in V$ tales que $Tv_j = w_j,\ j = 1, \dots, n$. Supongamos que $\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = 0$, donde $\lambda_j \in \mathbb{K}$. Entonces $\sum_{j=1}^n \lambda_j w_j = T(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j) = T(0)$. Por la independencia lineal de $w_1, \dots, w_n$, esto implica que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Lo cual indica que $v_1, \dots, v_n$ son linealmente independientes. Hemos probado así que

$$\text{si existe } T : V \to W \text{ lineal y suprayectivo, entonces } \dim V \geq \dim W. \tag{1.5}$$

En particular, si $T : V \to W$ es un operador lineal, observemos que $\dim V \geq \dim R(T)$.

Definición 1. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

a) Una función $T : V \to W$ es un *isomorfismo*, si es una biyección y es un operador lineal.

b) Los espacios V y W son *isomorfos*, si existe un isomorfismo $T : V \to W$.

Como consecuencia de (1.4) y (1.5), notemos que si V y W son espacios vectoriales isomorfos, entonces $\dim V = \dim W$.

Notación Sea V un espacio vectorial. Para $x \in V$ y $A \subseteq V$ definimos

$$x + A := \{x + y : y \in A\}.$$

Recordaremos enseguida dos importantes construcciones algebraicas.

Espacio vectorial cociente

Supongamos que V es un espacio vectorial y W un subespacio vectorial de V. Definamos en V la relación

$$v \sim x \quad \text{si} \quad v - x \in W.$$

Como consecuencia de que W es un subespacio vectorial se verifica directamente que $\sim$ define una relación de equivalencia en V. Si $v \in V$, denotaremos por $[v]$ su clase de equivalencia y diremos que v es un *representante* de $[v]$. La colección de dichas clases de equivalencia se denotará por V/W.

Sean $v, x \in V$. Entonces $[v] := \{y \in V : y \sim v\} = \{y \in V : y - v \in W\}$. Por lo tanto

$$[v] = v + W.$$

Además,
$$[v] = [x] \text{ equivale a que } v - x \in W.$$

Definimos ahora en V/W las operaciones

$$[v] + [x] := [v + x], \quad \lambda[v] := [\lambda v], \quad \forall\, v, x \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}. \tag{1.6}$$

Naturalmente, hay que establecer enseguida que las operaciones anteriores están bien definidas, es decir, que no dependen del representante de la clase de equivalencia que se ha empleado. Sean pues $u, v, x, y \in V$, y supongamos que $[u] = [v], [x] = [y]$. Luego, $u - v, x - y \in W$. Siendo W un subespacio vectorial, resulta entonces

$$u + x - (v + y) = (u - v) + (x - y) \in W.$$

Esto indica que $[u + x] = [v + y]$. Similarmente, para $\lambda \in \mathbb{K}$, se cumple

$$\lambda u - \lambda v = \lambda(u - v) \in W,$$

por lo que $\lambda[u] = \lambda[v]$.

Habiendo establecido que las operaciones en V/W están bien definidas, se comprueba ahora sin dificultad que, con ellas, V/W es un espacio vectorial, al cual llamaremos *espacio vectorial cociente*. (También se le conoce como V módulo W.) Notemos que el elemento cero es $[0] = W$.

En la construcción del espacio cociente V/W aparece naturalmente la función
$$\pi : V \to V/W, \text{ definida por } \pi(v) = [v],$$

a la cual llamaremos *proyección canónica* de V sobre V/W. De la definición de las operaciones vectoriales en V/W se sigue directamente que π es lineal.

El siguiente resultado resume el desarrollo anterior.

Teorema 1. *Sean V un espacio vectorial y W un subespacio vectorial de V. Bajo las operaciones definidas en (1.6), V/W es un espacio vectorial. Además, la proyección canónica $\pi : V \to V/W$ es lineal y suprayectiva.*

Ejemplo 1. Sean V y Y espacios vectoriales y $T : V \to Y$ un operador lineal. Siendo $N(T)$ un subespacio vectorial de V consideremos el espacio cociente $V/N(T)$ y definamos el operador $\widetilde{T} : V/N(T) \to Y$ por

$$\widetilde{T}[x] := Tx,\ \forall\, x \in V. \tag{1.7}$$

Para probar que $\widetilde{T}$ está bien definido, consideremos $v, x \in V$ y supongamos que $[v] = [x]$. Esto equivale a que $v - x \in N(T)$. Luego, $Tv = Tx$ y, por consiguiente, $\widetilde{T}[x] = \widetilde{T}[v]$. La verificación de que $\widetilde{T}$ es lineal es directa y la dejamos a cargo del lector. A $\widetilde{T}$ lo llamaremos *operador lineal inducido* por T en $V/N(T)$. Notemos que $R(\widetilde{T}) = R(T)$.

Notemos que mediante π, la proyección canónica de V sobre $N(T)$, la igualdad en (1.7) se expresa como

$$T = \widetilde{T}\pi.$$

Sea $v \in V$ y supongamos que $T([v]) = 0$. Entonces $Tv = 0$, esto es $v \in N(T)$. Por lo tanto $[v] = 0$. Esto prueba que $\widetilde{T}$ es $1-1$ y, en consecuencia, el operador $\widetilde{T}$ es un isomorfismo entre el espacio cociente $V/N(T)$ y el rango $R(T)$.

Espacio Vectorial Producto

Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Consideremos en el producto cartesiano $V \times W$ las operaciones definidas por componentes:

$$\begin{aligned} (v_1, w_1) + (v_2, w_2) &:= (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \\ \lambda(v, w) &:= (\lambda v, \lambda w). \end{aligned}$$

La comprobación de que $V \times W$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ es directa.

En el espacio producto aparecen de manera natural los operadores que describimos a continuación. Definimos $L_V : V \to V \times W$ y $L_W : W \to V \times W$ por

$$L_V(x) = (x, 0), \quad L_W(y) = (0, y).$$

Observemos que $L_V : V \to V \times \{0\}$ y $L_W : W \to \{0\} \times W$ son isomorfismos.

Por otro lado, están las *proyecciones* $\pi_V : V \times W \to V$ y $\pi_W : V \times W \to W$, definidas por

$$\pi_V(v, w) = v, \quad \pi_W(v, w) = w,$$

respectivamente. Observemos que cada una de ellas es lineal y suprayectiva.

Notas
Clase 3, febrero 3, 2023
Fernando Galaz Fontes