De acuerdo al lema anterior, tomemos $V_1 = \widetilde{W}$. Si $V_1 \neq X$, podemos aplicar nuevamente dicho resultado y extender f en la forma señalada a V_2, donde $V \subsetneqq V_1 \subsetneqq V_2$. Repitiendo este proceso podemos extender g una cantidad contable de veces. Sin embargo, el dominio de tal extensión podría no ser X. Para asegurarnos que esto ocurre requeriremos del lema de Zorn, según podremos apreciar en la demostración que sigue.

Teorema 1 (Tma. de Hahn-Banach)**.** *Sean X un espacio vectorial real, $\rho : X \to \mathbb{R}$ una seminorma y $V \subseteq X$ un subespacio vectorial. Si $\varphi : V \to \mathbb{R}$ es lineal y $|\varphi| \leq \rho$ en V, entonces existe $\overline{\varphi} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\overline{\varphi} = \varphi$ en V, $\overline{\varphi}$ es lineal, y $|\overline{\varphi}| \leq \rho$ en X.*

Demostración Consideremos la colección $\mathcal{F}$ formada por aquellas funciones $f : W \to \mathbb{R}$, donde $W \subseteq X$ es un subespacio vectorial tal que $V \subseteq W$ y f es una función lineal que cumple $f = \varphi$ en V y $|f| \leq \rho$ en W. Para $f, g \in \mathcal{F}$, definimos

$$f \leq g, \quad \text{si} \quad D(f) \subseteq D(g), \; f = g \text{ en } D(f),$$

donde $D(h)$ indica el dominio de $h \in \mathcal{F}$. Observemos primero que esta relación define un orden parcial en $\mathcal{F}$. Enseguida, para aplicar el lema de Zorn, consideremos una cadena $\mathcal{C} = \{f_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq \mathcal{F}, \; J \neq \emptyset$. Debemos probar que $\mathcal{C}$ tiene una cota superior. Tomemos $W_\alpha := D(f_\alpha), \forall\, \alpha \in J$ y definamos

$$W = \bigcup_{\alpha \in I} D(f_\alpha).$$

Sean $v, w \in W, k \in \mathbb{R}$. Entonces, $v \in W_\alpha, w \in W_\beta$, para ciertos $\alpha, \beta \in I$. Ya que $\mathcal{C}$ es una cadena, se cumple que $W_\alpha \subseteq W_\beta$ o bien $W_\beta \subseteq W_\alpha$. En el primer caso resulta que $v+w \in W_\beta \subseteq W$ y $kv \in W_\beta \subseteq W$. Cuando $W_\beta \subseteq W_\alpha$ la situación es análoga. Ya que $0 \in W$, esto muestra que W es un subespacio vectorial de X y claramente $V \subseteq W$.

Consideremos $x \in W$. Luego, $x \in D(f_\alpha)$ para algún $\alpha \in I$. Definamos

$$F(x) = f_\alpha(x).$$

Puesto que $\mathcal{C}$ es una cadena, se sigue primero que F está bien definida y después que es lineal. Además

$$|F(x)| \;=\; |f_\alpha(x)| \;\leq\; \rho(x) \;\forall\, x \in W.$$

Notando que $F = \varphi$ en V, resulta que $F \in \mathcal{F}$. Además $f_\alpha \leq F, \; \forall\, \alpha \in J$.

Lo anterior nos permite aplicar el lema de Zorn y concluir que $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal, digamos $\overline{\varphi}$. De acuerdo al lema 2, el dominio de $\overline{\varphi}$ debe ser X, probando así lo afirmado. $\square$

Observación 2. Si el espacio normado X es separable, el teorema de Hahn-Banach se puede probar sin utilizar el lema de Zorn. (Véase el ejercicio xx.)

Observación 3. Podemos notar que la prueba del teorema de Hahn-Banach sigue siendo válida si en lugar de ser una seminorma, la función ρ satisface $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y), \forall\, x, y \in X$ y sólo $\rho(ax) = a\rho(x),\ \forall\, a \geq 0, x \in X$.

Nos interesa ahora establecer el teorema de Hahn-Banach en el caso complejo. Empezamos con el siguiente lema, el cual indica que un funcional lineal complejo queda determinado por su parte real.

Lema 3. *Sean V un espacio vectorial complejo y $f : V \to \mathbb{C},\ g, h : V \to \mathbb{R}$. Si $f = g + ih$ es $\mathbb{C}$-lineal, entonces g y h son $\mathbb{R}$-lineales y*

$$h(x) = -g(ix),\ \forall\, x \in V. \tag{5.3}$$

Recíprocamente, si g es $\mathbb{R}$-lineal y defimos h como en (5.3), entonces $f = g + ih$ es $\mathbb{C}$-lineal.

Demostración Siendo f un funcional $\mathbb{C}$-lineal, la verificación de que su parte real g y su parte imaginaria h son $\mathbb{R}$-lineales es directa.

Sea $x \in V$. Ya que f es un funcional $\mathbb{C}$-lineal resulta

$$g(ix) + ih(ix) = f(ix) = if(x) = ig(x) - h(x).$$

En consecuencia $h(x) = -g(ix)$.

La última afirmación se probó en una tarea. $\square$

Corolario 1 (Caso complejo)**.** *Sean X un espacio vectorial complejo, $\rho : X \to \mathbb{R}$ una seminorma y $V \subseteq X$ un subespacio vectorial. Si $\varphi : V \to \mathbb{C}$ es lineal y $|\varphi(x)| \leq \rho(x),\ \forall\, x \in V$, entonces existe un funcional lineal $\overline{\varphi} : X \to \mathbb{C}$ tal que $\overline{\varphi} = \varphi$ en V y $|\overline{\varphi}(x)| \leq \rho(x),\ \forall\, x \in X$.*

Demostración La idea es considerar a V como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y tratar de utilizar el teorema de Hahn-Banach, ya establecido en el caso real.

Sean g la parte real de φ y h su parte imaginaria, esto es $\varphi = g + ih$, donde $i^2 = -1$. Extenderemos primero g y después, haciendo uso de (5.3), obtendremos una extensión para φ.

Tomemos $x \in V$. Entonces $|g(x)| \leq |f(x)| \leq \rho(x)$. Esto permite aplicar el teorema de Hahn-Banach para obtener un funcional lineal $G : X \to \mathbb{R}$ tal que $G = g$ en V y $|G| \leq \rho$ en X. Definamos ahora

$$\overline{\varphi}(x) := G(x) - iG(ix).$$

De acuerdo al lema anterior, $\overline{\varphi}$ es $\mathbb{C}$- lineal y $\overline{\varphi} = \varphi$ en V. Consideremos $x \in X$ y elijamos después $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $e^{i\theta}\overline{\varphi}(x) = |\overline{\varphi}(x)|$. Luego

$$|\overline{\varphi}(x)| = e^{i\theta}\overline{\varphi}(x) = \overline{\varphi}(e^{i\theta}x) = G(e^{i\theta}x) \leq \rho(e^{i\theta}x) = \rho(x). \quad \square$$

Corolario 2. *Sean X un espacio normado y $V \subseteq X$ un subespacio vectorial. Si $\varphi \in V^*$, entonces existe $\overline{\varphi} \in X^*$ tal que $\overline{\varphi} = \varphi$ en V y $\|\overline{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demostración Puesto que $\varphi \in V^*$ se cumple

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \, \|x\|, \; \forall \, x \in V.$$

Notamdo ahora que la función $\rho(\cdot) = \|\varphi\| \, \|\cdot\|$ es una seminorma en X, podemos aplicar el teorema de Hahn-Banach para obtener un funcional lineal $\overline{\varphi} : X \to \mathbb{K}$ tal que $\overline{\varphi} = \varphi$ en V y

$$|\overline{\varphi}(x)| \leq \|\varphi\| \, \|x\|, \; \forall \, x \in X.$$

Esto indica que $\overline{\varphi} \in X^*$ y $\|\overline{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$. Por otra parte, ya que $\overline{\varphi} = \varphi$ en V, se cumple que $\|\varphi\| \leq \|\overline{\varphi}\|$. $\square$

Observación 4. Con frecuencia al resultado anterior también se le llama 'teorema de Hahn-Banach'.

Corolario 3. *Sea X un espacio normado. Si $x \in X$, entonces existe $\varphi \in X^*$ tal que $\|\varphi\| \leq 1$ y $\varphi(x) = \|x\|$. En consecuencia, si $x_0 \in X$ y $\varphi(x_0) = 0$ para cada $\varphi \in X^*$, entonces $x_0 = 0$.*

Demostración Sea V el espacio generado por x, esto es $V = \{kx : k \in \mathbb{K}\}$. Definamos $\varphi_0 : V \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi_0(kx) = k \, \|x\|, \; \forall \, k \in \mathbb{K}. \tag{5.4}$$

Observemos que φ_0 es lineal, acotado y $\|\varphi_0\| \leq 1$. Esto permite aplicar el resultado anterior para obtener $\varphi \in X^*$, tal que $\|\varphi\| \leq \|\varphi_0\| \leq 1$ y $\varphi = \varphi_0$ en V. De (5.4) resulta entonces que $\varphi(x) = \|x\|$.

La segunda afirmación es consecuencia directa de lo anterior. $\square$

Corolario 4. *Sean X un espacio normado, $V \subseteq X$ un subespacio vectorial y $x \in X$. Si $x \notin \overline{V}$, entonces existe $\varphi \in X^*$ tal que*

$$\varphi(x) \neq 0 \text{ y } \varphi(v) = 0, \ \forall\, v \in V. \tag{5.5}$$

Demostración Introduzcamos el espacio normado cociente $W = X/\overline{V}$. Puesto que $x \notin \overline{V}$, la clase de equivalencia $[x] \in W$ es distinta de cero. De acuerdo al corolario anterior, existe entonces un funcional lineal $\psi : W \to \mathbb{K}$ que es continuo y $\psi([x]) \neq 0$. Sea $\pi : X \to W$ la proyección canónica y definamos $\varphi = \psi \circ \pi$. Es sencillo comprobar ahora que φ tiene las propiedades requeridas. $\square$

Notas
Clase 30, mayo 31, 2023
Fernando Galaz Fontes