5.3. Espacio dual de ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, y de c_0

El teorema de representación de Riesz indica que el espacio dual de un espacio de Hilbert H se puede representar por H mismo. A continuación estableceremos un teorema de representación para los espacios ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, y para c_0.

Fijemos $p \in [1, \infty]$ y sea q su exponente conjugado. Cuando consideramos un espacio de Hilbert H, el punto básico para definir el operador de representación $R : H \to H^*$ fue el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to H$. En ℓ^p el papel del producto escalar lo desempeñará la función $B_p : \ell^p \times \ell^q \to \mathbb{K}$, definida por

$$B_p(x, y) := \sum_{m=1}^{\infty} a_m b_m, \text{ donde } x = \{a_m\}, y = \{b_m\}. \tag{5.6}$$

Como se puede apreciar, la siguiente desigualdad corresponde ahora a la desigualdad de Schwarz.

Corolario 5 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean* $1 \leq p \leq \infty$ *y* q *su exponente conjugado. Si* $x = \{a_m\} \in \ell^p$ *y* $y = \{b_m\} \in \ell^q$*, entonces*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m||b_m| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \tag{5.7}$$

Demostración Consideremos primero el caso $p = 1$. Entonces su exponente conjugado es $q = \infty$ y $|b_m| \leq \|y\|_\infty$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$. En consecuencia

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m||b_m| \leq \|y\|_\infty \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| = \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

Esto prueba (5.7). El caso $p = \infty$ se establece de forma similar.

Consideremos ahora $1 < p < \infty$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Usando la desigualdad de Hölder en $\mathbb{K}^n$ obtenemos que

$$\sum_{m=1}^{n} |a_m||b_m| \leq \left(\sum_{m=1}^{n} |a_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{m=1}^{n} |b_m|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Haciendo ahora $n \to \infty$ resulta (5.7). $\square$

La desigualdad de Hölder implica que la serie en (5.6) converge absolutamente y, por lo tanto, B_p está bien definida. Además

$$|B_p(x, y)| \le \|x\|_p \|y\|_q. \tag{5.8}$$

Procediendo directamente de su definición y basándonos en las propiedades de las series convergentes, podemos verificar que

$$B_p \text{ es una función bilineal.} \tag{5.9}$$

Dada una sucesión $y = \{b_n\} \in \ell^q$, definimos ahora $R_p y : \ell^p \to \mathbb{K}$ por

$$R_p y(x) := B_p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \ \forall\, x = \{a_n\} \in \ell^p. \tag{5.10}$$

De la bilinealidad de B_p resulta que $R_p y$ es lineal y (5.8) indica que

$$\|R_p y\| \le \|y\|_q. \tag{5.11}$$

Así $R_p y \in (\ell^p)^*$, $\forall\, y \in \ell^q$, con lo cual se obtiene un operador $R_p : \ell^q \to (\ell^p)^*$. La bilinealidad de B_p implica que R_p es lineal y, por (5.11), R_p es acotado.

Teorema 2.

i) Sean $1 \le p < \infty$ y q su exponente conjugado. Entonces $R_p : \ell^q \to (\ell^p)^*$ es un isomorfismo isométrico, al cual llamaremos operador de representación de Riesz.

ii) El operador lineal $R_\infty : \ell^1 \to \ell^{\infty *}$ es una isometría que no es suprayectiva.

Demostración i) Empezaremos por establecer que $R = R_p$ es suprayectivo. Tomemos $\varphi \in (\ell^p)^*$. Debemos encontrar $y = \{b_n\} \in \ell^q$ tal que $\varphi = Ry$. Consideremos la sucesión canónica $\{e_n\} \subseteq \ell^p$. En virtud de (5.6), deberá cumplirse

$$b_n = B_p(e_n, y) = R_p y(e_n) = \varphi(e_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Así, el candidato para representar a φ es la sucesión $y := \{\varphi(e_n)\}$. Tenemos ahora que verificar que $y \in \ell^q$.

Consideremos primero el caso $1 < p < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $a_n = 0$ si $\varphi(e_n) = 0$ y $a_n = \dfrac{|\varphi(e_n)|^q}{\varphi(e_n)}$, si $\varphi(e_n) \neq 0$. Esto permite expresar, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} |\varphi(e_n)|^q = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi(e_n) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right). \tag{5.12}$$

Notando que $|a_n|^p \ = |\varphi(e_n)|^{p(q-1)} = \ |\varphi(e_n)|^q$, de (5.12) se obtiene

$$\sum_{n=1}^{N} |\varphi(e_n)|^q \ \leq \ \|\varphi\| \left[\sum_{n=1}^{N} |\varphi(e_n)|^q\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Ya que $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, esto implica

$$\left[\sum_{n=1}^{N} |\varphi(e_n)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq \|\varphi\|.$$

De aquí, al hacer $N \to \infty$, obtenemos

$$\|y\|_q \leq \|\varphi\|. \tag{5.13}$$

En el caso $p = 1$ resulta $|\varphi(e_n)| \leq \|\varphi\|, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, por lo que

$$\|y\|_\infty \leq \|\varphi\|. \tag{5.14}$$

De (5.13) y (5.14) se concluye que, en cualquier caso, $y \in \ell^q$.

Para probar que $R_p y = \varphi$, sea $x = \{a_n\} \in \ell^p$. Entonces $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ y, siendo φ un funcional lineal y continuo, resulta

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(e_n) = B_p(x, y) = R_p y(x).$$

Así $R_p y = \varphi$. De (5.11), (5.13) y (5.14) se concluye ahora que R_p es una isometría.

ii) Probaremos primero que $R_\infty : \ell^1 \to (\ell^\infty)^*$ es una isometría. Por (5.11) sólo falta establecer que

$$\|R_\infty y\| \ \geq \ \|y\|_1, \ \forall\, y \in \ell^1. \tag{5.15}$$

Sea $y = \{b_n\} \in \ell^1$ y definamos $a_n = \frac{|b_n|}{b_n}$ si $b_n \neq 0$ y $a_n = 0$ si $b_n = 0$. Entonces $x = \{a_n\} \in \ell^\infty, \|x\|_\infty \leq 1$ y

$$R_\infty y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \|y\|_1.$$

Con esto se obtiene (5.15) y, en consecuencia, R_∞ es una isometría.

Estableceremos ahora que R_∞ no es suprayectiva. Sea $y = \{b_n\} \in \ell^1$. Veamos primero que

$$\text{si } R_\infty y = 0 \text{ en } c_0, \text{ entonces } y = 0. \tag{5.16}$$

Para ello consideremos el sistema canónico $\{e_n\} \subseteq c_0$. Entonces $0 = R_\infty y(e_n) = b_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $y = 0$.

Puesto que $c_0 \subsetneqq \ell^\infty$, aplicando el teorema de Hahn-Banach resulta que en $\ell^{\infty *}$ hay funcionales que no son cero y que se anulan en c_0. De acuerdo con (5.16), un funcional de este tipo no es de la forma $R_\infty y$, donde $y \in \ell^1$.

$\square$

Para establecer la representación del espacio dual de c_0 nos servirá el mismo camino anterior.

Empecemos tomando $y \in \ell^1$ y sea $R_0 y$ la restricción de $R_\infty y$ al subespacio c_0. Se sigue entonces cumpliendo (5.11), esto es

$$\|R_0 y\| \le \|y\|_1,\ \forall\, y \in \ell^1, \tag{5.17}$$

y además mediante la correspondencia $y \mapsto R_0 y$ se obtiene un operador lineal continuo $R_0 : \ell^1 \to {c_0}^*$.

Teorema 3. *El operador lineal $R_0 : \ell^1 \to {c_0}^*$ es un isomorfismo isométrico, al cual llamaremos operador de representación de Riesz.*

Demostración Veamos primero que R_0 es suprayectivo. Para ello consideremos $\varphi \in {c_0}^*$. Al igual que en la prueba del teorema anterior, tomemos $y = \{\varphi(e_n)\}$. Probaremos enseguida que $y \in \ell^1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ elijmos $b_n = \frac{|\varphi(e_n)|}{\varphi(e_n)}$ si $\varphi(e_n) \neq$ y $b_n = 0$ si $\varphi(e_n) = 0$. Sea $N \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{N} |\varphi(e_n)| = \sum_{n=1}^{N} \varphi(e_n) b_n = \varphi\left(\sum_{n=1}^{N} b_n e_n\right) \le \|\varphi\| \sup\{|b_n| : 1 \le n \le N\} \le \|\varphi\|.$$

Haciendo ahora $N \to \infty$ llegamos a que $y \in \ell^1$ y

$$\|y\|_1 \le \|\varphi\|. \tag{5.18}$$

Finalmente, sea $x = \{c_n\} \in c_0$. Entonces $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$. Por la continuidad de $R_0 y$ y de φ, esto implica que

$$R_0 y(x) = B_\infty(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi(e_n) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n\right) = \varphi(x).$$

Luego, $R_0 y = \varphi$. De (5.17) y (5.18) se sigue entonces que R_0 es una isometría. $\square$

Observación 5. Sean $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado. Ya que el conjugado de q es p, resulta que

$$R_p(y)(x) = B_p(x, y) = B_q(y, x) = R_q(x)(y),\ \forall\, x \in \ell^p,\ y \in \ell^q.$$

Notas
Clase 31, junio 5, 2023
Fernando Galaz Fontes