5.4. Identificación canónica

Fijemos un espacio normado X. Dado $x \in X$ definamos el funcional $\widehat{x} : X^* \to \mathbb{K}$ por

$$\widehat{x}(\varphi) := \varphi(x), \ \forall \varphi \in X^*. \tag{5.19}$$

Observemos que $\widehat{x}$ es lineal. Además, la desigualdad

$$|\widehat{x}(\varphi)| \ \leq \ \|\varphi\| \, \|x\|, \ \forall \varphi \in X^*,$$

indica que $\widehat{x} \in X^{**}$ y

$$\|\widehat{x}\| \leq \|x\|, \ \forall x \in X. \tag{5.20}$$

A partir del teorema de Hahn-Banach, elijamos después $\varphi \in X^*$ tal que $\|\varphi\| \leq 1$ y $\|x\| = |\, \varphi(x) \,| = |\, \widehat{x}(\varphi) \,|$. Entonces $\|\widehat{x}\| \geq \|x\|$ y, por (5.20), concluimos que $\|x\| = \|\widehat{x}\|, \forall x \in X$.

Definamos ahora el operador $J : X \to X^{**}$ por $Jx = \widehat{x}$. Procediendo directamente, resulta que J es lineal. Así,

$$J : X \to X^{**} \text{ es una isometría lineal,} \tag{5.21}$$

a la cual lamaremos *identificación canónica* de X en su *espacio bidual* X^{**}. Cuando convenga indicar el espacio involucrado, usaremos J_X en lugar de J.

Observación 7.
1. Dado $x \in X$, notemos que el funcional $\widehat{x} \in X^{**}$ es simplemente el funcional de evaluación en x.

2. Observemos que (5.21) permite considerar a cualquier espacio de Banach como un espacio de funciones (continuas y lineales).

Enseguida usaremos la identificación canónica en una situación de interés.

Proposición 1. *Sea X un espacio normado. Entonces $A \subseteq X$ es acotado si, y sólo si, A es débilmente acotado.*

Demostración Supongamos primero que A es acotado y elijamos $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c, \ \forall x \in A$. Sea $\varphi \in X^*$. Entonces $|\varphi(x)| \ \leq c\|\varphi\|, \ \forall x \in A$. Así, $\varphi(A) \subseteq \mathbb{K}$ es acotado. Esto prueba que A es débilmente acotado.

Supongamos ahora que A es débilmente acotado. Puesto que la identificación canónica $J : X \to X^{**}$ es una isometría lineal, notemos que para concluir que A es acotado, basta probar que el conjunto $J(A) = \{Jx : x \in A\} \subseteq X^{**}$

es acotado. El que $J(A)$ sea un conjunto de operadores lineales continuos nos permitirá aplicar ahora el teorema de acotamiento uniforme para lograrlo.

Así, por el teorema de acotamiento uniforme, es suficiente establecer que la familia $J(A)$ es puntualmente acotada en X^*. Sea $\varphi \in X^*$. Ya que A es débilmente acotado, escojamos c tal que $|\varphi(x)| \leq c, \forall\, x \in A$. Entonces

$$|\widehat{x}(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq c, \ \forall\, x \in A. \qquad \square$$

Completación de un espacio normado

Sea X un espacio normado, supongamos que no es completo y que $X \subseteq Y$, donde Y es un espacio de Banach. Entonces la cerradura $\overline{X}$ es un espacio de Banach, $X \subseteq \overline{X}$ y X es denso en $\overline{X}$. Es natural entonces llamar a $\overline{X}$ *completación* de X.

Consideremos nuevamente un espacio normado X que no es completo y supongamos ahora que no conocemos algún espacio de Banach Y tal que $X \subseteq Y$. Para definir la completación $[X]$ de X, en este caso trabajaremos con una 'representación' de X en un espacio de Banach Y. Esta representación se expresará mediante una isometría lineal $J : X \to Y$ y la completación de $[X]$ estará entonces dada por

$$[X] = \overline{J(X)} \subseteq Y.$$

Naturalmente, esta completación no es única. Sin embargo, es posible establecer que cualquier par de completaciones son isométricamente isomorfas, lo cual permite 'identificarlas'.

La identificación canónica permite aplicar el desarrollo anterior, de la siguiente forma. Supongamos que X no es completo y sea $J : X \to X^{**}$ la identificación canónica, esto es $Jx = \widehat{x}\ \forall\, x \in X$. Ya que J es una isometría lineal y el espacio bidual X^{**} es completo, resulta que

$$[X] = \overline{\{\widehat{x} : x \in X\}} \subseteq X^{**}$$

es una completación de X.

Apareamiento dual

Partamos de un espacio normado X y consideremos $x \in X$ y $\varphi \in X^*$. La notación '$\varphi(x)$' enfatiza a x como variable y a φ como un "elemento fijo".

Sin embargo, la identificación canónica muestra que también tiene sentido considerar a x como "elemento fijo"y a φ como variable. Para realzar esta "dualidad"es que se introduce la función $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X^* \to \mathbb{K}$ definida por

$$\langle x, \varphi\rangle \ := \ \varphi(x), \ x \in X, \varphi \in X^*, \tag{5.22}$$

y llamada *apareamiento dual* de X con X^*. Cuando sea conveniente referirse a los espacios involucrados, el apareamiento dual se indicará por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X\times X^*}$.

Antes de continuar, observemos que

$$\langle \varphi, \widehat{x}\rangle_{X^*\times X^{**}} \ = \ \langle x, \varphi\rangle_{X\times X^*}, \ \forall\, x \in X, \varphi \in X^*.$$

El siguiente resultado indica las propiedades básicas del apareamiento dual y es consecuencia directa de propiedades que hemos establecido.

Lema 4. *Sea X un espacio normado. Entonces:*
i) El apareamiento dual $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es una función bilineal que satisface

$$|\langle x, \varphi\rangle| \ \leq \ \|x\|\,\|\varphi\|, \ \forall\, x \in X, \varphi \in X^*. \tag{5.23}$$

ii) Si $\varphi \in X^*$ y $\langle x, \varphi\rangle \ = \ 0, \forall\, x \in X$, entonces $\varphi = 0$.
iii) Si $x \in X$ y $\langle x, \varphi\rangle \ = \ 0, \forall\, \varphi \in X^*$, entonces $x = 0$.

Observemos que la desigualdad (5.23) indica que el apareamiento dual $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X^* \to \mathbb{K}$ es una función continua. Sean $\{x_n\} \subseteq X, \ x \in X$ y $\{\varphi_n\} \subseteq X^*, \ \varphi \in X^*$. En consecuencia,

$$\text{si } x_n \to x, \text{ y } \varphi_n \to \varphi, \text{ entonces } \langle x_n, \varphi_n\rangle \to \langle x, \varphi\rangle. \tag{5.24}$$

Espacios reflexivos

Definición 4. Un espacio normado X es *reflexivo*, si su identificación canónica $J : X \to X^{**}$ es suprayectiva.

Notemos que la reflexividad de un espacio normado X equivale a que la identificación canónica J sea un isomorfismo isométrico entre X y su bidual X^{**}. Además nos permite separar los espacios normados en dos grandes grupos: los que son reflexivos y los que no. Siendo siempre X^{**} un espacio de Banach, todo espacio reflexivo es completo.

Estableceremos enseguida que cualquier espacio de Hilbert es reflexivo. Empezaremos viendo que el espacio dual de un espacio de Hilbert H también es un espacio de Hilbert. En otras palabras, definiremos en H^* un producto escalar cuya norma asociada es precisamente la norma dual.

Consideremos pues un espacio de Hilbert H, con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, y sea $R : H \to H^*$ el operador de representación de Riesz. Para cada $x, y \in H$ definamos

$$\langle Rx, Ry \rangle_{H^*} := \langle y, x \rangle_H. \tag{5.25}$$

En un ejercicio de la tarea 14 establecimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^*}$ es un producto escalar en H^*. Aplicando el teorema de representación de Riesz resulta que

$$\langle Rx, Rx \rangle_{H^*} = \langle x, x \rangle_H = \|x\|_H^2 = \|Rx\|_{H^*}^2, \ \forall\, x \in H.$$

Esto indica que la norma correspondiente a este producto escalar coincide con la norma dual en H^*. Concluimos así que H^* es un espacio de Hilbert.

Sea K un espacio de Hilbert. Antes de continuar notemos que, usando el apareamiento dual y el operador de representación de Riesz $S : K \to K^*$, el producto escalar en K se expresa como

$$\langle x, y \rangle_K = \langle x, Ry \rangle_{K \times K^*}, \ \forall\, x \in K, y \in K. \tag{5.26}$$

Teorema 4. *Todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

Demostración Sea H un espacio de Hilbert. Denotemos por $R : H \to H^*$ y $R_* : H^* \to H^{**}$ las representaciones de Riesz correspondientes a H y H^*, respectivamente. Sea $J : H \to H^{**}$ la identificación canónica. Ya que R y R_* son biyecciones, para concluir que J es suprayectiva basta establecer que $J = R_* R$, esto es

$$\widehat{x} = R_* R x, \ \forall\, x \in H. \tag{5.27}$$

Sean $x, y \in H$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle Ry, R_*(Rx) \rangle_{H^* \times H^{**}} &= \langle Ry, Rx \rangle_{H^*} = \langle x, y \rangle_H \\ &= \langle x, Ry \rangle_{H \times H^*} = \langle Ry, \widehat{x} \rangle_{H^* \times H^{**}}. \end{aligned}$$

Puesto que R es suprayectiva, esto prueba (5.27). $\square$

Teorema 5.
i) Si $1 < p < \infty$, entonces ℓ^p es reflexivo.
ii) c_0 no es reflexivo.

Demostración i) Consideremos $p \in (1, \infty)$ y su exponente conjugado q. Sean $R_p : \ell^q \to \ell^{p*}$ y $R_q : \ell^p \to \ell^{q^*}$ los correspondientes operadores de representación de Riesz. Tomemos $\varphi \in \ell^{p**}$, esto es $\varphi : \ell^{p*} \to \mathbb{K}$ es lineal y continuo. Entonces $\varphi R_p \in \ell^{q*}$. Siendo R_q un isomorfismo, existe $x \in \ell^p$ tal que $\varphi R_p = R_q x$. Por consiguiente

$$\varphi(R_p y) = (R_q x)y = B_q(y, x) = B_p(x, y) = (R_p y)x = \widehat{x}(R_p y), \forall\, y \in \ell^q$$

Puesto que R_p es un isomorfismo, de lo anterior resulta que $\varphi = \widehat{x}$. Así, el espacio de Banach ℓ^p es reflexivo.

ii) No alcanzamos. $\square$

Observación 8. Los espacios ℓ^1 y ℓ^∞ resultan no ser reflexivos

Notas
Clase 32, junio 7, 2023
Fernando Galaz Fontes