## 1.3. Espacio normado

La norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$ provee la motivación para el segundo elemento que consideraremos en nuestro estudio.

**Definición 2.** Sea $X$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una *norma* en $X$ es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

a) $\|x\| \geq 0$, y $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.

b) $\|cx\| = |c|\,\|x\|$, $\forall\, x \in X$, $c \in \mathbb{K}$. Aquí $|c|$ denota el módulo de $c$.

c) Desigualdad del triángulo: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall\, x, y \in X$.

A un espacio vectorial $X$ dotado de una norma lo llamamos *espacio normado.*

**Notación** Si $X$ es un espacio normado, aunque no se especifique, $\|\cdot\|$ denotará su norma correspondiente. Cuando sea conveniente distinguirla, se indicará por $\|\cdot\|_X$.

**Observación 3.** Sea $X$ un espacio normado.

1. Consideremos $x_1, \ldots, x_n \in X$. Usando varias veces la desigualdad del triángulo, resulta entonces que

$$\|x_1 + \cdots + x_{n+1}\| \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_n\| + \|x_{n+1}\|.$$

2. Si $V \subseteq X$ es un subespacio vectorial, notemos que la restricción a $V$ de la norma en $X$ es una norma en $V$. La llamaremos *norma subespacio* en $V$.

El disponer de una norma en un espacio vectorial $X$, permite definir conceptos en forma análoga al caso de $\mathbb{R}^k$ con su norma euclidiana. Enseguida destacaremos unas cuantas propiedades básicas del concepto de convergencia de sucesiones. En el capítulo 2 lo estudiaremos con más detalle.

**Definición 3.** Sea $X$ un espacio normado y $\{x_n\}$ una sucesión en $X$. Diremos que $\{x_n\}$ *converge*, si existe $x \in X$ tal que $\|x_n - x\| \to 0$. Es decir, si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\|x_n - x\| \leq \epsilon,\ \forall\, n \geq N.$$

Para expresar lo anterior, indicaremos $x_n \to x$ o bien $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ y llamaremos a $x$ *límite* de la sucesión $\{x_n\}$. Enseguida probamos su unicidad.

**Lema 3.** *Si existe, el límite de una sucesión en un espacio normado es único.*

**Demostración** Consideremos un espacio normado $X$. Sean $\{x_n\}$ una sucesión en $X$, $x, y \in X$ y supongamos que $x_n \to x$ y $x_n \to y$. Para probar que $x = y$ consideremos $\epsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_N - x\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ y $\|x_N - y\| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Usando la desigualdad del triángulo, esto implica que $\|x - y\| \leq \epsilon, \forall \epsilon > 0$. Haciendo ahora $\epsilon \to 0$ se sigue que $x = y$. $\square$

**Observación 4.** Notemos que aunque $\{x_n\}$ es una sucesión de vectores en $X$ y $x \in X$, el establecer que $\{x_n\}$ converge a $x$ significa demostrar que la sucesión de números reales no-negativos $\{\|x - x_n\|\}$ converge a 0.

**Ejemplo 4.** Sea $X$ un espacio normado y consideremos una sucesión constante, digamos $x_n = x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$. Observemos entonces que $\{x_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Concluiremos esta sección probando algunas relaciones fundamentales de la convergencia con las operaciones algebraicas y con la norma.

**Teorema 2.** *Sean $X$ un espacio normado, $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X, x, y \in X$, $\{a_n\} \subseteq \mathbb{K}$, y $a \in \mathbb{K}$. Si $x_n \to x$, $y_n \to y$, $a_n \to a$, entonces:*

*i) $x_n + y_n \to x + y$. En particular, $x_n + y \to x + y$.*

*ii) $a_n x_n \to ax$.*

**Demostración** i) De la desigualdad del triángulo resulta

$$\|x_n + y_n - (x + y)\| = \|x_n - x + y_n - y\| \leq \|x_n - x\| + \|y - y_n\|.$$

Por otra parte, ya que $\|x_n - x\| \to 0$ y $\|y_n - y\| \to 0$, se sigue que $\|x_n - x\| + \|y - y_n\| \to 0$. De esto junto con la desigualdad previa obtenemos la conclusión.

ii) Usando las propiedades de una norma, resulta

$$\begin{aligned} \|a_n x_n - ax\| &= \|a_n(x_n - x) + (a_n - a)x\| \\ &\leq |a_n| \, \|x_n - x\| + |a_n - a| \, \|x\|. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Siendo convergente, la sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathbb{K}$ es acotada. Esto implica que $|a_n| \, \|x_n - x\| \to 0$ . Puesto que además $|a_n - \lambda| \, \|x\| \to 0$, se sigue que la sucesión de la derecha en (1.8) converge a cero. Esto implica lo afirmado. $\square$

**Lema 4.** *Sean $X$ un espacio normado, $\{x_n\} \subseteq X$ y $x, y \in X$. Entonces:*

*i) $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|$.*

*ii) Si $x_n \to x$, entonces $\|x_n\| \to \|x\|$.*

**Demostración** i) Por la desigualdad del triángulo, se satisface

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|.$$

Luego $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Intercambiando enseguida $x$ con $y$ resulta $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. De las desigualdades anteriores se obtiene lo indicado.

ii) De acuerdo con i), se cumple

$$|\,\|x\| - \|x_n\|\,| \leq \ \|x - x_n\|.$$

De esta desigualdad la conclusión es clara. $\square$

**Definición 4.** Sea $X$ un espacio normado. Si $x \in X$ y $r > 0$, la *bola cerrada con centro en $x$ y radio $r > 0$* es

$$B_r(x) := \{y \in X : \|y - x\| \leq r\}.$$

En particular, a $B_1(0)$ la llamaremos la *bola unitaria cerrada* de $X$ y la denotaremos por $B_X$.

Aunque es puramente vectorial, el siguiente concepto resulta fundamental en el análisis funcional.

**Definición 5.** Sea $V$ un espacio vectorial. Un conjunto $A \subseteq V$ es *convexo* si cuando $x, y \in A$ y $0 \leq t \leq 1$, entonces $x + t(y - x) \in A$.

**Lema 5.** *Sea $X$ un espacio normado. Si $x \in X$ y $r > 0$, entonces $B_r(x)$ es convexo.*

**Demostración** Sean $w, y \in B_r(x)$ y $0 \leq t \leq 1$. Expresando $x = (1-t)x + tx$, obtenemos $w + t(y - w) - x = (1 - t)(w - x) + t(y - x)$. Notando ahora que $1 - t \geq 0$ y $t \geq 0$, al usar las propiedades de una norma, se obtiene

$$\|w + t(y - w) - x\| = \|(1 - t)(w - x) + t(y - x)\| \leq (1 - t)r + tr = r.$$

Esto indica que $w + t(w - y) \in B_r(x)$. $\square$

## Norma $p$ en $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$

**Ejemplo 5.** Si $v = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, consideremos

$$\begin{aligned} \|v\|_2 &:= \left( \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|v\|_1 &:= \sum_{j=1}^{n} |a_j|, \\ \|v\|_\infty &:= \text{máx}(|a_1|, \ldots, |a_n|). \end{aligned}$$

La primera función $\|\cdot\|_2$ es la norma euclidiana en $\mathbb{K}^n$ y dejamos como ejercicio verificar que $\|\cdot\|_1$ y $\| \cdot \|_\infty$ también son normas.

Enseguida describimos geométricamente la bola unitaria cerrada en $\mathbb{R}^2$ correspondiente a cada una de las normas anteriores.

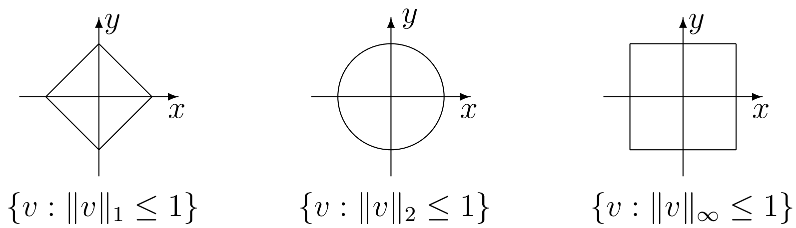


**Figura 1**

Las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ motivan a preguntarse si, para cada $p \in [1, \infty)$, la función

$$\|(a_1, \ldots, a_n)\|_p := \left( \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.9}$$

define una norma en $\mathbb{K}^n$.

Procediendo directamente se verifica que la función $\|\cdot\|_p$ tiene las propiedades a) y b) en la definición de norma. Sin embargo, para establecer la desigualdad del triángulo necesitaremos de los siguientes resultados.

**Definición 6.** Si $1 \leq p \leq \infty$, denotaremos por $q = q(p)$ el único elemento en $[1, \infty]$ tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

donde tomamos $\frac{1}{\infty} = 0$. A $q$ le llamaremos el *exponente conjugado* de $p$.

Notas
Clase 4, febrero 8, 2023
Fernando Galaz Fontes