Notemos que $q(2) = 2$, $q(1) = \infty$ y $q(\infty) = 1$. Además $q(q(p)) = p$, $\forall\, p \in [1, \infty]$.

Lema 6. *Sean $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado. Entonces, para cada $a, b \geq 0$ se cumple*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q. \tag{1.10}$$

Demostración Fijemos $b \geq 0$ y, motivados por la desigualdad (1.10), introduzcamos la función auxiliar

$$f(x) = \frac{1}{p}\, x^p + \frac{1}{q}\, b^q - bx, \ \forall\, x \geq 0.$$

Observemos que para obtener la conclusión basta probar que $f \geq 0$. Para ello calcularemos su valor mínimo, lo cual nos lleva a considerar los puntos críticos de f. Así

$$f'(x) = x^{p-1} - b = 0 \quad \Leftrightarrow x = b^{\frac{1}{p-1}}.$$

Entonces el único punto crítico de f es $x_0 = b^{\frac{1}{p-1}}$. Ya que $f'(x) = x^{p-1} - b$ y $p - 1 > 0$, la derivada f' es creciente. Luego, $f'(x) < 0$ si $0 \leq x < x_0$ y $f'(x) > 0$ si $x_0 < x$. Por lo tanto f toma su valor mínimo en x_0 y éste es

$$f(x_0) = \frac{1}{p}\, b^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q}\, b^q - b\, b^{\frac{1}{p-1}} = 0,$$

pues $q = \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1}$. $\square$

La siguiente desigualdad desempeña respecto de $\|\cdot\|_p$ un papel análogo al de la desigualdad de Schwarz para la norma euclidiana.

Teorema 3 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean $p \in (1, \infty)$ y q su exponente conjugado. Si $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geq 0$, entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \ \leq \ \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.11}$$

Demostración Tomemos $a = (\sum_{j=1}^{n} a_j^p)^{\frac{1}{p}}$ y $b = (\sum_{j=1}^{n} b_j^q)^{\frac{1}{q}}$. Observando primero que la desigualdad (1.11) se cumple cuando $a = 0$ o $b = 0$, supondremos que $a > 0$ y $b > 0$. Luego, al dividir en (1.11) por ab obtenemos la desigualdad equivalente

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{a} \frac{b_j}{b} \;\le\; 1, \tag{1.12}$$

la cual estableceremos a continuación

Por el lema anterior, para cada $j = 1, \ldots, n$ resulta $\dfrac{a_j}{a}\dfrac{b_j}{b} \le \dfrac{1}{p}\dfrac{a_j^p}{a^p} + \dfrac{1}{q}\dfrac{b_j^q}{b^q}$. Lo cual implica que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{a}\frac{b_j}{b} \;\le\; \frac{1}{p}\frac{1}{a^p}\sum_{j=1}^{n} a_j^p + \frac{1}{q}\frac{1}{b^q}\sum_{j=1}^{n} b_j^q \;=\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \;=\; 1.$$

Esto prueba (1.12). $\square$

El *producto escalar* de los vectores $x = (a_1, \ldots, a_n), y = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j. \tag{1.13}$$

Como veremos más adelante, si $x = (a_1, \ldots, a_n)$, $y = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ conviene definir

$$\langle x, y\rangle \;:=\; \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j}, \tag{1.14}$$

donde $\overline{z}$ indica el conjugado de $z \in \mathbb{C}$. Ya que $\overline{c} = c$ si $c \in \mathbb{R}$, la expresión anterior coincide con (1.13) cuando $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Así pues, de forma general el *producto escalar* $\langle x, y\rangle$, siendo $x = (a_1, \ldots, a_n)$ y $y = (b_1, \ldots, b_n)$ vectores en $\mathbb{K}^n$, está definido por (1.14).

Fijemos $1 < p < \infty$ y sean $x = (a_1, \ldots, a_n), y = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$. Usando primero la desigualdad del triángulo, teniendo presente enseguida que $|\overline{c}| = |c|, \forall\, c \in \mathbb{K}$, y usando después la desigualdad de Hölder con $|a_1|, \ldots |a_n|$ y $|b_1|, \cdots |b_n|$, resulta

$$|\langle x, y\rangle| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j}\right| \le \sum_{j=1}^{n} |a_j||b_j| \le \|x\|_p \|y\|_q. \tag{1.15}$$

Sea $p = 1$. Entonces $q = \infty$ y para $x = (a_1, \ldots, a_n)$, $y = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$, se cumple

$$|\langle x, y\rangle| \le \sum_{j=1}^{n} |a_j||b_j| \le \sum_{j=1}^{n} |a_j|\|y\|_\infty = \|x\|_1 \|y\|_\infty. \tag{1.16}$$

Consideremos finalmente $p = \infty$. Entonces $q = 1$ y procediendo como en el caso anterior llegamos a que

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1, \;\forall\, x, y \in \mathbb{K}^n. \tag{1.17}$$

De (1.15), (1.16) y (1.17) obtenemos el siguiente resultado, al cual también llamaremos *desigualdad de Hölder.*

Corolario 1 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean $p \in [1,\infty]$ y q su exponente conjugado. Entonces*

$$|\langle x, y\rangle| \;\leq\; \|x\|_p \|y\|_q, \;\forall\, x, y \in \mathbb{K}^n.$$

Teorema 4. *Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces $\|\cdot\|_p$ es una norma en $\mathbb{K}^n$, a la cual llamaremos norma p.*

Demostración De acuerdo al teorema 1, es natural considerar tres casos: $p = 1, 1 < p < \infty$ y $p = \infty$. Los casos en que $p = 1$ o $p = \infty$ se establecen directamente y quedarán a cargo del lector.

Supongamos entonces que $1 < p < \infty$. Como ya se mencionó, las propiedades a) y b) que debe satisfacer una norma se establecen sin dificultad. Nos concentraremos en la desigualdad del triángulo. Sean $x = (a_1, \ldots, a_n)$, $y = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$|a_j + b_j|^p \;= |a_j + b_j||a_j + b_j|^{p-1} \leq |a_j||a_j + b_j|^{p-1} + |b_j||a_j + b_j|^{p-1}.$$

Lo cual implica que

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j||a_j + b_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} |b_j||a_j + b_j|^{p-1}.$$

Usando ahora la desigualdad de Hölder y observando que $(p-1)q = p$, resulta

$$\begin{aligned}
&\|x + y\|_p^p \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{q}} = (\|x\|_p + \|y\|_p)\; \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Si $\|x+y\|_p = 0$, claramente $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. Supongamos ahora que $\|x+y\| > 0$. Entonces al dividir en (1.18) entre $\|x+y\|_p^{\frac{p}{q}}$ y notar que $p(1-\frac{1}{q}) = 1$, obtenemos $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. $\square$

Observación 6. Sea $1 < p < \infty$. A la desigualdad del triángulo en $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ se le conoce como *desigualdad de Minkowski*. Notemos que ésta toma la forma

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

siendo $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$.

1.3. Completez

Habiendo introducido el concepto de convergencia en un espacio normado, surge naturalmente la cuestión de determinar aquellas propiedades de la convergencia en $\mathbb{K}$ que se conservan en este contexto mucho más general. La propiedad que resulta desempeñar fundamental es la del criterio de Cauchy, el cual señala la equivalencia para una sucesión en $\mathbb{K}$ entre ser convergente y ser de Cauchy. Más adelante veremos que este criterio no siempre es válido. Sin embargo, como podremos apreciar, los espacios normados donde el criterio de Cauchy se cumple aparecen de manera natural y resultan ser muy importantes en las aplicaciones.

Definición 7. Sea X un espacio normado. Una sucesión $\{x_n\} \subseteq X$ es *de Cauchy* si, para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\| \leq \epsilon, \ \forall\, m, n \geq N.$$

Lema 7. *Sea X un espacio normado. Si $\{x_n\} \subseteq X$ es una sucesión convergente, entonces es de Cauchy.*

Demostración Sea $\{x_n\} \subseteq X$ un sucesión convergente, digamos a $x \in X$. Tomemos $m, n \in \mathbb{N}$ y notemos que

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_m - x\| + \|x - x_n\|. \tag{1.19}$$

Sea $\epsilon > 0$. Ya que $x_n \to x$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| \leq \frac{\epsilon}{2}$, $\forall\, n \geq N$. Entonces, al usar (1.19) resulta que $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon$, $\forall\, m, n \geq N$. $\square$

Notas
Clase 5, febrero 13, 2023
Fernando Galaz Fontes