Definición 8. Un espacio normado X es *completo* si cada sucesión en X que es de Cauchy, es convergente. A un espacio normado completo lo llamaremos *espacio de Banach.*

Ejemplo 6. $\mathbb{K}^n$ (con su norma euclidiana) es un espacio de Banach.
Demostración Sea $\{x_m\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}^n$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, expresemos $x_m = (a_{m,1}, \ldots, a_{m,n})$. Observemos enseguida que

$$|a_{n,j} - a_{m,j}| \;\leq \|x_n - x_m\|_2,\; j = 1, \ldots, n.$$

De esta desigualdad se sigue que, para cada $j = 1, \ldots, n$, la sucesión $\{a_{m,j}\}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$. Luego, existe $a_j \in \mathbb{K}$ de manera que $a_{m,j} \to a_j$, cuando $m \to \infty$. Definamos $x = (a_1, \ldots, a_n)$. Ya que

$$\|x_m - x\|_2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{m,j} - a_j|,$$

concluimos que $x_m \to x$. $\square$

Definición 9. Sea X un espacio normado. Un conjunto $A \subseteq X$ es *acotado*, si existe un número $c \geq 0$ tal que

$$\|x\| \leq c,\; \forall\, x \in A. \tag{1.20}$$

Ejemplo 7. Sean X un espacio normado y $A \subseteq X$ un conjunto finito. Si $A = \emptyset$, la condición (1.20) se cumple por vacuidad. Consideremos ahora $n \in \mathbb{N}$ y $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Se cumple entonces (1.20) con $c = \max\{\|x_1\|, \cdots, \|x_n\|\}$.
Así, cualquier conjunto finito en un espacio normado es acotado.

El siguiente resultado señala más conjuntos acotados.

Lema 8. *Sea X un espacio normado. Si $\{x_n\} \subseteq X$ es una sucesión de Cauchy, entonces es acotada.*

Demostración Al considerar $\epsilon = 1$ en la definición de sucesión de Cauchy, se obtiene $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_m - x_n\| \leq 1$, cuando $m, n \geq N$. Luego,

$$\|x_n\| \;\leq\; \|x_n - x_N\| + \|x_N\| \;\leq 1 + \|x_N\|,\; \forall\, n \geq N.$$

Entonces, tomando $c = \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_{N-1}\|, \|x_N\| + 1\}$, se cumple que $c > 0$ y $\|x_n\| \leq c, \forall\, n \in \mathbb{N}$. $\square$

En las siguientes secciones introduciremos otros espacios de Banach. Al momento de tener que demostrar que son completos conviene tener presente la siguiente observación.

Observación 7. Sean X un espacio normado y $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en X. Para establecer directamente que esta sucesión converge se pueden identificar los siguientes pasos:
1. Proponer (o "construir") el candidato x a ser el límite.
2. Establecer que $x \in X$.
3. Verificar que $x_n \to x$.

1.4. Espacio de funciones acotadas

En esta sección introduciremos el primer espacio de Banach que no es $\mathbb{K}^n$.

Sean D un conjunto arbitrario no-vacío y X un espacio normado. Para cada función $f : D \to X$, definamos

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\| : x \in D\}. \tag{1.21}$$

Observemos que $0 \leq \|f\|_\infty \leq \infty$.

Definición 10. Una función $f : D \to X$ es *acotada*, si su imagen $f(D) \subseteq X$ es un conjunto acotado.

Notemos que

$$f \text{ es acotada si, y sólo si }, \|f\|_\infty < \infty.$$

Denotaremos por $B(D, X)$ el subconjunto del espacio vectorial $F(D, X)$ formado por las funciones acotadas.

Lema 9. *El conjunto $B(D, X)$, con las operaciones vectoriales definidas puntualmente, es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $B(D, X)$.*

Demostración Para simplificar la notación tomemos $B = B(D, X)$ y $F = F(D, X)$. Sea f_0 la función constante 0, definida en D. Claramente $f_0 \in B$. Tomemos enseguida $f \in F$ tal que $\|f\|_\infty = 0$ y notemos que esto implica que $f(x) = 0, \forall\, x \in D$. Luego $f = f_0$. Consideremos ahora $f, g \in F$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup\{\|\lambda f(x)\|, x \in D\} = \sup\{|\lambda|\|f(x)\| : x \in D\} = |\lambda|\|f\|_\infty. \tag{1.22}$$

Por otra parte,

$$\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,\ \forall\, x \in D.$$

Tomando ahora supremo respecto de $x \in D$ concluimos que

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \tag{1.23}$$

Ya que B es no-vacío, se sigue de (1.22) y (1.23) que B es un subespacio vectorial de F y que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en B. $\square$

A la norma $\|\cdot\|_\infty$ definida en $B(D,X)$ por (1.21), se le llama *norma del supremo*. En adelante, a menos que se indique otra cosa, al considerar al espacio de funciones acotadas $B(D,X)$ como espacio normado lo supondremos con la norma del supremo.

Observación 8.
1. Sean $g \in B(D,X)$ y $r > 0$. Observemos que

$$\|g\|_\infty \leq r \iff \|g(x)\| \leq r,\ \forall\, x \in D.$$

2. Consideremos $\{f_n\} \subseteq B(D,X)$, $f \in B(D,X)$ y $\epsilon > 0$. Entonces, de acuerdo al punto anterior, resulta

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon \iff \|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon,\ \forall\, x \in D.$$

Esto resulta ser de mucho interés pues indica que la convergencia $f_n \to f$ en el espacio normado $B(D,\mathbb{K})$ equivale a a que la sucesión $\{f_n\}$ converja uniformemente a f en D, lo cual denotaremos por $f_n \overset{u}{\to} f$.

Teorema 5.*Si X es un espacio de Banach, entonces $B(D,X)$ también lo es.*

Demostración Tomemos $B = B(D,X)$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en B. Para proponer el candidato a límite analizaremos la convergencia puntual de $\{f_n\}$.

Fijemos $x \in D$ y notemos que

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \ \leq\ \|f_n - f_m\|_\infty,\ \forall\, x \in D.$$

Siendo $\{f_n\}$ de Cauchy en B, esto implica que la sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy en X. Puesto que X es completo, definimos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{1.24}$$

Debemos probar ahora que $f \in B$ y $f_n \to f$ en B. Ya que $\{f_n\}$ es de Cauchy, de acuerdo al lema 8 existe $c > 0$ de manera que

$$\|f_n(x)\| \ \leq \|f_n\|_\infty \ \leq c, \ \forall\, x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Haciendo ahora $n \to \infty$, por (1.24) y ii) en el lema 2.1, obtenemos

$$\|f(x)\| \ \leq c, \ \forall\, x \in D.$$

Esto indica que $f \in B$.

Finalmente, sea $\epsilon > 0$. Ya que $\{f_n\}$ es de Cauchy, elijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \epsilon, \ \forall\, m, n \geq N, \ x \in D.$$

Fijemos en seguida $m \geq N$. Haciendo $n \to \infty$, de la desigualdad anterior y ii) en el lema 2.1 resulta ahora que

$$\|f(x) - f_m(x)\| \ \leq \ \epsilon, \ \forall\, m \geq N, \ x \in D;$$

esto es, $\|f - f_m\|_\infty \ \leq \ \epsilon, \ \forall\, m \geq N.$ $\square$

Ejemplo 8. Sea D un conjunto no-vacío. Ya que $\mathbb{R}^m$ es un espacio de Banach, del teorema anterior se sigue que el espacio de funciones acotadas $B(D, \mathbb{R}^m)$ es un espacio de Banach.

Notas
Clase 6, febrero 15, 2023
Fernando Galaz Fontes