Espacio de funciones continuas en un compacto

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto no-vacío. Denotaremos por $C(K, \mathbb{R}^m)$ la colección de todas las funciones $f : K \to \mathbb{R}^m$ que son continuas.

A partir de las propiedades de la continuidad resulta inmediatamente que el conjunto $C(K, \mathbb{R}^m)$ es un subespacio vectorial de $F(K, \mathbb{R}^m)$. De hecho, ya que una función continua definida en un conjunto compacto es acotada, resulta que

$$C(K, \mathbb{R}^m) \subseteq B(K, \mathbb{R}^m).$$

Lo cual permite considerar en $C(K, \mathbb{R}^m)$ la norma subespacio, a la cual también llamaremos norma del supremo.

Teorema 7. $C(K, \mathbb{R}^m)$*, con la norma del supremo, es un espacio de Banach.*

Demostración Tomemos $C = C(K, \mathbb{R}^m)$, $B = B(K, \mathbb{R}^m)$. Sólo falta verificar que C es completo. Sea pues $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en C. Para establecer que $\{f_n\}$ converge en C, en vez de empezar "desde cero", como se hizo en el teorema anterior, aprovecharemos que $C \subseteq B$ y que B es un espacio de Banach.

Siendo $\{f_n\}$ de Cauchy en C, y C tiene la norma subespacio, notemos que $\{f_n\}$ es de Cauchy en B. Ya que B es completo, existe entonces $f \in B$ tal que $f_n \to f$ en B. Observemos ahora que sólo resta mostrar que $f \in C$, es decir, que f es continua. Puesto que $f_n \to f$ en B, entonces $f_n \overset{u}{\to} f$. Por un resultado conocido de análisis, la continuidad de cada función f_n permite ahora concluir que f es continua. $\square$

Podemos ya presentar un espacio normado que no es completo.

Ejemplo 10. Sean $C([-1, 1]) := C(([-1, 1], \mathbb{R})$ y X el subespacio formado por los polinomios $P : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. En X consideremos la norma subespacio y veamos que este espacio normado no es completo.

Fijemos una función $f \in C([-1, 1])$ que no sea derivable en 0, por ejemplo la función valor absoluto. De acuerdo al teorema de Weierstrass existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ tal que

$$P_n \overset{u}{\to} f \text{ en } [-1, 1]. \tag{1.31}$$

Luego, $P_n \to f$ en $C([-1, 1])$. Se sigue que $\{P_n\}$ es de Cauchy en X. Supongamos que existe $P \in X$ tal que $P_n \overset{u}{\to} P$. Por (1.31), esto implica que $P = f$. Sin embargo, esto no es posible pues f no es derivable en 0.

1.6. Series

Definición 14. Sean X un espacio normado y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Formemos en seguida la sucesión $\{S_N\}$ de sumas parciales

$$S_N = x_1 + \cdots + x_N, \ \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

Si esta sucesión converge, diremos que la *serie* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge* y además denotaremos su límite por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie convergente en X. Para cada $N \in \mathbb{N}$, por la desigualdad del triángulo, se cumple $\|\sum_{n=1}^{N} x_n\| \leq \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|$. De aquí, después de hacer $N \to \infty$ y utilizar ii) en el lema 4, resulta

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Nos referiremos al resultado anterior diciendo que "la desigualdad del triángulo se cumple también para series convergentes".

El siguiente concepto resulta muy útil para analizar si una serie es convergente en un espacio de Banach.

Definición 15. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie en un espacio normado X. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge, diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge absolutamente.*

Lema 12. *Si X es un espacio de Banach, entonces toda serie en X que converge absolutamente, también converge.*

Demostración Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie en X que converge absolutamente. Siendo X un espacio de Banach, para concluir que esta serie converge estableceremos que su sucesión de sumas parciales es de Cauchy.

Consideremos $\epsilon > 0$. Ya que la sucesión de sumas parciales de la series $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > m \geq N$, entonces

$$\sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = \left| \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| - \sum_{k=1}^{m} \|x_k\| \right| \leq \epsilon.$$

Por lo tanto

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \leq \epsilon.$$

$\square$

1.7. Espacios ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$

Cada elemento en $\mathbb{K}^n$ se puede interpretar como una sucesión finita de n números en $\mathbb{K}$. Los espacios ℓ^p se obtienen al considerar sucesiones infinitas y tomar la norma $\|\cdot\|_p$ correspondiente. Lo haremos a continuación.

Denotemos por $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ la colección de todas las sucesiones en $\mathbb{K}$. Observemos que $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ bajo las operaciones

$$\begin{aligned} \{a_n\} + \{b_n\} &:= \{a_n + b_n\}, \\ c\{a_n\} &:= \{ca_n\}, \ \forall\, c \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Si $x = \{a_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{K}$, definimos

$$\begin{aligned} \|x\|_p &:= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall\, p \in (0, \infty), \\ \|x\|_\infty &:= \sup\{|a_n| \colon n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Notemos que $\|x\|_p$ puede ser ∞.

Definición 16. Para $0 < p \leq \infty$, la colección $\ell^p(\mathbb{K})$ consiste de todas las sucesiones x en $\mathbb{K}$, tales que $\|x\|_p < \infty$. Si $0 < p < \infty$ y $\|x\|_p < \infty$ se acostumbra decir que x es *p-sumable*.

Observación 10. Sea A cualquier conjunto. Formalmente, una sucesión en A es simplemente una función $f : \mathbb{N} \to A$, la cual se expresa usualmente como $\{f(n)\}$ y sobreentendemos que $n \in \mathbb{N}$. En particular

$$\mathcal{S}(\mathbb{K}) := F(\mathbb{N}, \mathbb{K}).$$

Observando ahora que $\ell^\infty(\mathbb{K})$ consiste precisamente de todas las sucesiones en $\mathbb{K}$ que son acotadas, resulta que

$$\ell^\infty(\mathbb{K}) = B(\mathbb{N}, \mathbb{K}). \tag{1.32}$$

Lema 13.
i) $\ell^p(\mathbb{K})$ *es un espacio vectorial,* $\forall\, p \in (0, \infty]$.
ii) Si $1 \leq p \leq \infty$, *entonces* $\|\cdot\|_p$ *es una norma.*
iii) Si $0 < p < 1$, *entonces* $\|\cdot\|_p$ *no es una norma.*

Demostración A lo largo de esta prueba, $x = \{a_n\}$ y $y = \{b_n\}$ son sucesiones en $\mathbb{K}$ y $c \in \mathbb{K}$.

i) De acuerdo a (1.32), sólo resta considerar $p \in (0, \infty)$. Fijemos entonces $0 < p < \infty$ y tomemos $\ell^p = \ell^p(\mathbb{K})$ y $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{K})$. Probaremos que ℓ^p es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}$. Empecemos señalando que la sucesión constante cero pertenece a ℓ^p. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n + b_n|)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}(2\,\text{máx}\{|a_n|, |b_n|\})^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^p(|a_n|^p + |b_n|^p) \\
&= 2^p\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^p\right)
\end{aligned}$$

Si $x, y \in \ell^p$, se sigue de aquí que $x + y \in \ell^p$.

Notas
Clase 7, febrero 20, 2023
Fernando Galaz Fontes