Probaremos ahora que

$$\|cx\|_p = \ |c|\|x\|_p,\ \forall\, x \in \mathcal{S}. \tag{1.27}$$

Ya que $\sum_{n=1}^N |ca_n|^p = |c|^p \sum_{n=1}^N |a_n|^p$, al hacer $N \to \infty$, se obtiene

$$\|cx\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |ca_n|^p = |c|^p \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p = |c|^p \|x\|_p^p.$$

Si $x \in \ell^p$, se sigue de aquí que $cx \in \ell^p$.

ii) Sea $1 \leq p < \infty$. Claramente $\|\cdot\|_p$ es una función no-negativa que se anula en la sucesión constante cero. Supongamos que $\|x\|_p = 0$. Esto implica que $a_n = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$, es decir, x es la sucesión cero.

De acuerdo con (1.27), sólo resta probar la desigualdad del triángulo. Sea $N \in \mathbb{N}$. Por la desigualdad de Minkowski en $\mathbb{K}^N$ se cumple

$$\left(\sum_{n=1}^N |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^N |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p,\ \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

Elevando ahora a la p y haciendo después $N \to \infty$ resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p.$$

Elevando enseguida a la $\frac{1}{p}$ obtenemos

$$\|x + y\|_p \ \leq \ \|x\|_p + \|y\|_p.$$

iii) Sea $0 < p < 1$. Tomemos $x = (1, 0, \ldots, 0 \ldots), y = (0, 1, \ldots, 0 \ldots)$. Puesto que $\frac{1}{p} > 1$, resulta

$$\|x + y\|_p = 2^{\frac{1}{p}} > 2 = \|x\|_p + \|y\|_p. \ \square$$

En adelante consideraremos sólo $p \geq 1$, en cuyo caso $\ell^p(\mathbb{K})$ es un espacio normado.

Teorema 7. $\ell^p(\mathbb{K})$ *es un espacio de Banach,* $\forall\, p \in [1, \infty]$.

Demostración En virtud de (1.32), sólo resta considerar $1 \leq p < \infty$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^p. Para proponer el candidato a límite procedemos en forma similar a la seguida para probar que $\mathbb{K}^m$ es completo. Expresemos $x_n = \{a_{n,j} : j \in \mathbb{N}\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, y fijemos $J \in \mathbb{N}$. Entonces

$$|a_{n,J} - a_{k,J}| = (|a_{n,J} - a_{k,J}|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{n,j} - a_{k,j}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x_n - x_k\|_p.$$

Esto implica que la sucesión $\{a_{n,J} : n \in \mathbb{N}\}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$. Luego, existe

$$a_J := \lim_{n\to\infty} a_{n,J}. \tag{1.28}$$

Definamos $x = \{a_j\}$. Debemos probar que $x \in \ell^p$ y $x_n \to x$ en ℓ^p.

Puesto que la sucesión $\{x_n\} \subseteq \ell^p$ es de Cauchy, existe un número $c \geq 0$ tal que $\|x_n\|_p \leq c$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Fijemos $J \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{J} |a_{n,j}|^p \leq \|x_n\|_p^p \leq c^p, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Tomando ahora el límite cuando $n \to \infty$, se sigue que $\sum_{j=1}^{J} |a_j|^p \leq c^p$. Haciendo ahora $J \to \infty$, se concluye que $x \in \ell^p$.

Sea $\epsilon > 0$. Ya que $\{x_n\}$ es de Cauchy en ℓ^p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_k\|_p \leq \epsilon,\ \forall\, n, k \geq N.$$

Sea $J \in \mathbb{N}$. Notemos entonces que

$$\sum_{j=1}^{J} |a_{n,j} - a_{k,j}|^p \leq \epsilon^p,\ \forall\, n, k \geq N.$$

Fijemos ahora $n \geq N$. Haciendo en seguida $k \to \infty$ y teniendo presente (1.28), a partir de la desigualdad anterior obtenemos

$$\sum_{j=1}^{J} |a_{n,j} - a_j|^p \leq \epsilon^p,\ \forall\, n \geq N.$$

De lo cual resulta que $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{n,j} - a_j|^p \leq \epsilon^p,\ \ n \geq N$. Por consiguiente

$$\|x_n - x\|_p \leq \epsilon,\ \forall\, n \geq N. \tag{1.29}$$

Esto prueba que $x_n \to x$ en ℓ^p. $\square$

Espacios c y c_0

Definición 14. *El espacio $c\,(\mathbb{K})$ está formado por las sucesiones en $\mathbb{K}$ que son convergentes y $c_0(\mathbb{K})$ consiste de aquellas que convergen a 0.*

De los lemas 7 y 8 resulta que toda sucesión convergente es acotada. Luego,

$$c_0(\mathbb{K}) \subseteq c\,(\mathbb{K}) \subseteq \ell^\infty(\mathbb{K}).$$

De las propiedades del límite (teorema 2) se sigue que c es un subespacio vectorial de $\ell^\infty(\mathbb{K})$ y que $c_0(\mathbb{K})$ es un subespacio vectorial de $c\,(\mathbb{K})$. En $c\,(\mathbb{K})$ y $c_0(\mathbb{K})$ consideraremos entonces la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$.

Teorema 8. *$c\,(\mathbb{K})$ y $c_0(\mathbb{K})$ son espacios de Banach.*

Demostración Probaremos solamente la completez de $c := c(\mathbb{K})$ y dejaremos como ejercicio la prueba correspondiente a $c_0(\mathbb{K})$.

Sea $\{x_n\} \subseteq c$ una sucesión de Cauchy y expresemos $x_n = \{a_{n,m} : m \in \mathbb{N}\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Ya que $c \subseteq \ell^\infty$ y ℓ^∞ es un espacio de Banach, existe $x = \{a_m\} \in \ell^\infty$ tal que $x_n \to x$. Para obtener la conclusión, sólo resta probar que $x \in c$, lo cual haremos estableciendo que x es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$.

Sea $\epsilon > 0$ y elijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - x_N\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{3}$. Al ser una sucesión convergente, x_N es de Cauchy en $\mathbb{K}$. Por lo tanto existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{N,m} - a_{N,k}| \leq \frac{\epsilon}{3}$, $\forall\, m, k \geq M$. Luego,

$$|a_m - a_k| \leq |a_m - a_{N,m}| + |a_{N,m} - a_{N,k}| + |a_{N,k} - a_k| \leq \epsilon,\ \forall\, m, k \geq M. \quad \square$$

Notas
Clase 8, febrero 22, 2023
Fernando Galaz Fontes