Ejemplo 10. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por e_n la sucesión en $\mathbb{K}$ cuyo n-ésimo término es 1 y todos los demás son 0. Tomemos

$$B := \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq S(\mathbb{K}),$$

y notemos que es linealmente independiente. Llamaremos a B *sistema canónico*.

Definimos enseguida el espacio

$$c_{0,0} := \{\{a_n\} \subseteq \mathbb{K} : \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0, \ \forall\, n > N\}.$$

Notemos que $c_{0,0} = \langle B \rangle$, esto es, $c_{0,0}$ es el espacio vectorial generado en $S(\mathbb{K})$ por la base canónica B. Además $B \subseteq \ell^p, 1 \leq p < \infty$ y $B \subseteq c_0$.

Proposición 1. *Sea $X = \ell^p$ donde $1 \leq p < \infty$ o $X = c_0$. Entonces*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \ \forall\, x = \{a_n\} \in X. \tag{1.30}$$

Demostración Sea $x = \{a_n\} \in X$. La N-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ es entonces $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n = (a_1, \ldots, a_N, 0 \ldots)$. Para establecer (1.30) debemos probar que $\|x - S_N\|_X \to 0$, cuando $N \to \infty$.

Consideremos primero $1 \leq p < \infty$. Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$, concluimos que

$$\|x - S_N\|_p = \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \to 0,$$

cuando $N \to \infty$ y

Para terminar, tomemos $X = c_0$. Ya que $a_n \to 0$, en este caso obtenemos que, cuando $N \to \infty$,

$$\|x - S_N\|_\infty = \sup\{|a_n| : n > N\} \to 0. \ \square$$

Observación 11. Resulta de interés observar que la igualdad (1.30) indica que el sistema canónico $\{e_n\}$ se comporta en X de manera "parecida" a como lo hace una base en un espacio vectorial de dimensión finita.

Veamos ahora que la igualdad (1.30) no se cumple en $c \subseteq \ell^\infty$. Para ello tomemos como x la sucesión constante 1, esto es, $x := \{a_n\}$, donde $a_n := 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Claramente, $x \in c$. Sean $N, M \in \mathbb{N}, \ N > M$. Entonces

$$\|S_N - S_M\|_\infty = \|(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 0 \ldots)\|_\infty = 1.$$

Esto indica que la sucesión de sumas parciales $\{S_N\}$ no es de Cauchy y, por lo tanto, no converge en ℓ^∞. En particular, no se cumple (1.30).

Ejemplo 11. Consideremos el espacio de Banach $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{K})$ y notemos que la sucesión $s = \{\frac{1}{n}\} \in \ell^2$. Usando el ejemplo 10 con $X = \ell^2$, resulta $s = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} e_n$. Así, la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} e_n$ es convergente. Sin embargo, la serie de sus normas es $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$, la cual no es convergente. En conclusión, aunque es convergente, la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} e_n$ no converge absolutamente.

Capítulo 2

Topología y continuidad en espacios métricos

Introducción

Después de conocer varios espacios de Banach, nos interesa ahora introducir y analizar en un espacio normado los conceptos básicos con que trabajamos en $\mathbb{R}^n$ y que nos permiten estudiar propiedades de funciones, sobre todo su continuidad. Para ello será conveniente trabajar en el marco de espacios topológicos y espacios métricos.

Sean X un espacio normado y $M \subseteq X$. Si M no es un subespacio vectorial, la restricción de $\|\cdot\|$ a M no es una norma. Luego, el estudio de una función $f : M \to \mathbb{K}$ no puede realizarse en el contexto de espacios normados. Por otra parte, notemos que el análisis de funciones definidas en un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ muchas veces no depende directamente de la estructura vectorial en su dominio, sino que se lleva a cabo a través de la función distancia

$$d(x, y) := \|x - y\|_2, \ \forall\, x, y \in M.$$

Esto motiva el concepto abstracto de métrica y, con él, el de espacio métrico.

Aunque para los propósitos de este trabajo sería suficiente considerar espacios métricos, resulta conveniente desarrollar algunos aspectos en un contexto más general, que será el de un espacio topológico. Recordemos que la idea de espacio topológico se puede motivar notando que varios conceptos definidos originalmente mediante la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$, se pueden describir usando solamente los correspondientes conjuntos abiertos.

2.1. Espacio topológico y continuidad

Sea E cualquier conjunto. Una *topología* en E es una colección τ de subconjuntos de E con las siguientes propiedades:
a) $\emptyset, E \in \tau$.
b) Si $V_\alpha \in \tau,\ \forall\, \alpha \in I$, entonces $\cup_{\alpha\in I} V_\alpha \in \tau$.
c) Si $V_1, \dots, V_n \in \tau$, entonces $V_1 \cap \cdots \cap V_n \in \tau$.
En este caso llamaremos a (E, τ) *espacio topológico*. Además, si $V \in \tau$ diremos que V es un conjunto *abierto*.

Es costumbre no señalar explícitamente la topología τ involucrada, sino simplemente decir que E es un espacio topológico.

Definición 1. Sean E un espacio topológico y $A \subseteq E$. Un punto $p \in A$ es *punto interior* de A, si existe un conjunto abierto V tal que $p \in V \subseteq A$. En este caso también diremos que A es *vecindad* de p.

El conjunto de puntos interiores de A se denotará por A^0. Claramente

$$A^0 \subseteq A,\ \forall\, A \subseteq E.$$

El concepto de interior tiene las siguientes sencillas propiedades.

Proposición 1. *Sean E un espacio topológico y $A, B \subseteq E$.*
i) Si $A \subseteq B$, entonces $A^0 \subseteq B^0$.
ii) Si A es abierto, entonces $A = A^0$.
iii) A^0 es abierto.

Demostración i) Sea $p \in A^0$. Luego, existe un conjunto abierto V tal que $p \in V \subseteq A$. Entonces $p \in V \subseteq B$. Esto indica que $p \in B^0$.
ii) Sea $p \in A$. Luego $p \in A \subseteq A$. Siendo A un abierto, esto indica que $p \in A^0$. Por consiguiente $A \subseteq A^0$. Ya que $A^0 \subseteq A$, resulta $A = A^0$.
iii) Según la definición de punto interior, para cada $p \in A^0$ existe un abierto V_p tal que $p \in V_p \subseteq A$. Luego $A^0 \subseteq \cup_{p\in A^0} V_p$. Por otra parte, también por la definición de punto interior, resulta que $V_p \subseteq A^0$ y, en consecuencia, $\cup_{p\in A^0} V_p \subseteq A^0$. Esto implica que $A^0 = \cup_{p\in A^0} V_p$ y, por lo tanto, A^0 es abierto.
$\square$

Definición 2. Sea E un espacio topológico. Un conjunto $K \subseteq E$ es *cerrado,* si su complemento $K^c := \{x \in E : x \notin K\}$ es abierto.

Usando las leyes de De Morgan, es sencillo verificar que los subconjuntos cerrados en E tienen las siguientes propiedades.

Proposición 2. *Sea E un espacio topológico. Entonces:*
i) $\emptyset$ y E son cerrados.
ii)Si K_α es cerrado, $\forall\, \alpha \in I \neq \emptyset$, entonces $\cap_{\alpha \in I} K_\alpha$ es cerrado.
iii) Si $K_1, \ldots, K_n$ son cerrados, entonces $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ es cerrado.

Definición 3. Sean E un espacio topológico y $A \subseteq E$. Al conjunto de puntos $x \in E$ tales que, para cada vecindad V de x, se cumple que $V \cap A \neq \emptyset$ lo llamaremos *cerradura* de A y se denotará por $\overline{A}$.

A continuación presentamos unas propiedades bśicas de la cerradura. Notemos primero que $A \subseteq \overline{A}$, $\forall\, A \subseteq E$.

Proposición 3. *Sean E un espacio topológico y $A, B \subseteq E$.*
i) Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
ii) Si A es cerrado, entonces $\overline{A} = A$.
iii) $\overline{A}$ es cerrado.

Demostración i) Supongamos que $p \in \overline{A}$ y sea V una vecindad de p. Luego, $V \cap A \neq \emptyset$. Ya que $A \subseteq B$, se sigue que $V \cap B \neq \emptyset$. Esto indica que $p \in \overline{B}$.
ii) Sólo resta probar que $\overline{A} \subseteq A$ o, equivalentemente, $A^c \subseteq \overline{A}^c$. Sea $x \in A^c$. Al ser un conjunto abierto, A^c es vecindad de x. Ya que $A^c \cap A = \emptyset$, resulta que $x \notin \overline{A}$.
iii) Debemos probar que $\overline{A}^c$ es abierto. Por la proposición 1, basta entonces establecer que cada punto de $\overline{A}^c$ es un punto interior.

Sea pues $p \in \overline{A}^c$. Luego, existe una vecindad V de p tal que $V \cap A = \emptyset$. Esto implica que $p \in V^0 \subseteq \overline{A}^c$. $\square$

Lema 1. *Sean E un espacio topológico y $A_1, \ldots, A_n \subseteq E$. Entonces $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$.*

Demostración Hagamos $A = \overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$ y $B = \overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$. Puesto que $A_1 \cup \ldots \cup A_n \subseteq B$, después de tomar cerradura y tener presente que B es cerrado, resulta $A \subseteq B$. Por otra parte, para cada $j = 1, \ldots, n$, $A_j \subseteq A$. Siendo A cerrado, esto implica que $\overline{A_j} \subseteq A, j = 1, \ldots, n$. Luego $B \subseteq A$. $\square$

Notas
Clase 9, febrero 27, 2023
Fernando Galaz Fontes