ANALISIS FUNCIONAL 1: TAREA 1

A continuación V y W siempre son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

1. Sea $J \neq \phi$. Si $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ es una colección de subespacios vectoriales de V, prueba que $\cap_{\alpha\in J} V_\alpha$ es un subespacio vectorial.

Definición Sea V un espacio vectorial. Si $M, N \subseteq V$, definimos

$$M + N := \{x + y : x \in M, y \in N\}.$$

2. Si M y N son subespacios vectoriales de V, prueba que $M + N$ lo es.

3. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $T, S : V \to W$ son operadores lineales, prueba que $T + S$ y λT también lo son.

4. Sea $T : V \to W$ un operador lineal. Si $V_0 \subseteq V$ es un subespacio vectorial, prueba que $T(V_0)$ es un subespacio vectorial de W. Concluye que su rango $R(T)$ es un subespacio vectorial de W.

5. Sea $T : V \to W$ un operador lineal. Prueba que T es $1-1$ si, y sólo si, $N(T) = \{0\}$.

Definición Sean M y N subespacios vectoriales de V. Para expresar que $V = M + N$ y $M \cap N = \{0\}$, indicaremos $V = M \oplus N$ y diremos que V es la *suma directa* de M y N.

6. Si $V = M \oplus N$, prueba que $\dim V = \dim M + \dim N$.

7. Si $V = M \oplus N$, prueba que V es isomorfo con $M \times N$. Luego $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$.

8. Sea W un subespacio vectorial de V. Prueba que la relación $v \sim x$, si $v - x \in W$ es una relación de equivalencia en V.

9. Sea W un subespacio vectorial de V. Prueba que V/W, con las operaciones definidas por representantes, es un espacio vectorial.

Definición. Sea W un subespacio vectorial de V. La *codimensión* de W (respecto de V) es $\dim V/W$ y se denotará por $\mathrm{codim}_V W$ o simplemente por $\mathrm{codim} W$.

10. Si $W \subseteq Z \subseteq V$, prueba que $\mathrm{codim}_V W \geq \mathrm{codim}_V Z$.

11. Verifica que las funciones $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas en $\mathbb{K}^n$.

12. Si $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, prueba que $\sum_{j=1}^n a_j^p \leq (\sum_{j=1}^n a_j)^p, \ \forall\, p \in [1, \infty)$.

Para entregarse el miércoles 8 de febrero, 2024.