**ANALISIS FUNCIONAL I: TAREA 10**

A continuación $V, W$ y $Z$ son espacios vectoriales, y $X$ y $Y$ son normados.

**Definición** La *deficiencia* de un operador lineal $S : V \to W$ se define como $\beta(S) := \mathrm{codim} T(V)$.

1*. Sean $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ operadores lineales. Prueba entonces que $\beta(ST) \leq \beta(S) + \beta(T)$

**Definición** Si $B : X \times Y \to Z$ es un operador bilineal, definimos entonces $\|B\|_{\mathcal{B}} := \sup\{|B(x, y)| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$.

2. Prueba que $\| \cdot \|_{\mathcal{B}}$ define una norma en $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$.

**Definición** Una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *se anula en infinito* si, para cada $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que $|f(x)| \leq \epsilon$ cuando $\|x\| \geq r$. Denotaremos por $C_0(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de tales funciones.

3. Prueba: i) $C_0(\mathbb{R}^n) \subseteq B(\mathbb{R}^n)$. ii) $C_0(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial.
iii) Con la norma del supremo, $C_0(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach.

4. Prueba que el espacio de Banach $B([0, 1])$ no es separable.

5*. Considera la sucesión en $\mathbb{R}$ definida por $a_0 = \frac{3}{2}$, $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}$. Prueba que $\{a_n\}$ converge y calcula su límite.

6. Sean $X$ y $Y$ espacios normados reales. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, prueba que su complejificación $T_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}})$ y $\|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|$.

7. Sea $1 \leq p \leq \infty$. El operador de *desplazamiento izquierdo* ("left shift operator") $S : \ell^p \to \ell^p$ se define por $S(x_1, x_2, \ldots, ) = (x_2, x_3, \ldots)$. Verifica que $S$ es lineal, y encuentra $\|S\|$, $\alpha(S)$ y $\beta(S)$.

8. Consideremos espacios de Banach $X$ y $Y$, $D \subseteq X$ un subespacio denso y un operador $T \in \mathcal{L}(D, Y)$. Si $T$ es 1-1 y $T^{-1} : R(T) \to D$ es continuo, prueba que la extensión $\widetilde{T}$ de $T$ a $X$ también es 1-1.

9. Sea $W \subseteq X$ un subespacio vectorial cerrado y $\pi : X \to X/W$ la proyección canónica. Prueba:
i) Prueba que $\pi$ manda la bola abierta de radio $r > 0$ y centro en el origen de $X$ sobre la bola abierta de radio $r$ y centro en el origen de $X/W$.
ii) Concluye que $\pi$ preserva abiertos.

10. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si $\|\cdot\|_1$ es una norma en $X$ que es equivalente con $\|\cdot\|$, prueba que $(X, \|\cdot\|_1)$ también es completo.

Para entregar y revisarse el viernes 28 de abril, 2023.

SUGERENCIAS

1*. Construye un operador lineal suprayectivo de $W/T(V)\times Z/S(W)$ en $Z/ST(V)$.

5*. Trata de usar el teorema de contracción en un intervalo apropiado que incluya a $\frac{1}{2}$.