ANALISIS FUNCIONAL I: TAREA 11

A continuación V, W y Z son espacios vectoriales, y X y Y normados.

1. Sea Z un espacio vectorial complejo. Si $\varphi : Z \to \mathbb{R}$ es un funcional $\mathbb{R}$-lineal y $\Psi(z) := \varphi(z) - i\varphi(iz), \forall\, z \in Z$, prueba que Ψ es un funcional $\mathbb{C}$-lineal.

2. Sea FP el espacio de funciones continuas $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ con periodo 2π, esto es $f(-\pi) = f(\pi)$. Prueba que FP, con la norma del supremo, es un espacio de Banach.

Definición Sea X un espacio normado. Un operador lineal $P \in \mathcal{L}(X)$ es una *proyección*, si $P^2 = P$.

3. Sean I el operador identidad en X y $P \in \mathcal{L}(X)$ una proyección. Prueba:
i) $I - P$ también es una proyección.
ii) $R(P) = N(I - P)$. Luego, P tiene rango cerrado.
iii) $X = R(P) \oplus N(P)$.

4. Sean $V \subseteq X$ un subespacio vectorial y $T : V \to X$ un operador lineal. Si existen $0 \leq a < 1$ y $0 \leq b < 1$ tales que $\|x - Tx\| \leq a\|Tx\| + b\|x\|, \forall\, x \in V$, prueba que $T : V \to R(T)$ es un isomorfismo topológico.

5*. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal lineal. Si $\dim R(T) < \infty$ y $N(T)$ es cerrado, prueba que T es continuo.

6. Sea V un subespacio de X. Si los espacios normados V y X/V son completos, prueba que X también lo es.

7*. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios con grado $\leq m$. Si $P_n(x) \to 0, \forall\, x \in [0,1]$, prueba que la convergencia en $[0,1]$ es uniforme.

8. Sea $B : X \times Y \to Z$ una función bilineal continua. Para cada $x \in X$ definamos la función $B_x : Y \to Z$ por $B_x(y) := B(x, y)$.
i) Prueba que $B_x \in \mathcal{L}(Y, Z),\ \forall\, x \in X$.
ii) El operador $T_B : X \to \mathcal{L}(Y, Z)$ definido por $T_B x := B_x$ es lineal y acotado.

9. Consideremos el espacio normado $X = c_{0,0}$ con la norma del supremo. Definamos $T(x_1, \ldots, x_n \ldots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots)$. Prueba:
i) $T \in \mathcal{L}(X)$. ii) T es un isomorfismo. iii) T no preserva abiertos.

10. Sean M y N espacios métricos y $f : M \to N$. Si $G(f) \subseteq M \times N$ es cerrado y N es compacto, prueba que f es continua.

11*. Sea $s \in S(\mathbb{K})$. Si $sx \in \ell^1, \forall\, x \in \ell^1$, prueba que $s \in \ell^\infty$.

Para revisar y entregarse el viernes 5 de mayo, 2023

SUGERENCIAS

5*. Considera el espacio cociente.

7*. Observa que el espacio correspondiente de polinomios tiene dimensión finita y trata de introducir una norma adecuada.

11*. Prueba la proposición contrapositiva.