ANALISIS FUNCIONAL I: TAREA 12

A continuación V y W son espacios vectoriales, X y Y son espacios normados y H es un espacio de Hilbert.

1. Para $s = \{a_n\} \in \ell^1(\mathbb{C})$, definamos la función $T(s) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ por $T(s)(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. Prueba que $T(s) \in \mathrm{FP}$, que $T : \ell^1 \to \mathrm{FP}$ es lineal y encuentra $\|T\|$.

2. Sea $T : X \to X$ un operador lineal. Si $\|I - T\| < 1$, prueba que el operador $T : X \to R(T)$ es un isomorfismo topológico. (X puede no ser completo.)

3*. Sean V, W subespacios de X. Si $\dim V < \infty$ y W es cerrado, prueba que $V + W$ es cerrado.

4.(Ejercicio 11.8.) Para cada operador bilineal continuo $B : X \times Y \to Z$, sea $T(B) := T_B$. Prueba que $T : B(X, Y; Z) \to \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z)$ es un isomorfismo.

5. Sean V y W subespacios tales que $X = V \oplus W$. Sea P la proyección sobre V, esto es $P(v + w) = v$, $\forall\, v \in V, w \in W$. Verifica que P es lineal y prueba que $P : X \to V$ preserva abiertos.

6. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $X = (C([a, b], \mathbb{C})$. Para $f, g \in X$ definamos $\langle f, g\rangle := \int_a^b f\overline{g}$. Prueba que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar en X.

7. i) Si $y = \lambda x$ y $\lambda \geq 0$, prueba que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

ii) Supongamos ahora que H es un espacio pre-Hilbert. Si $x, y \in H$, $x \neq 0$ y $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, prueba que $y = \lambda x$, donde $\lambda \geq 0$.

iii) Encuentra un espacio normado donde no se cumpla lo señalado en ii).

8. Sean H y K espacios pre-Hilbert. Prueba que $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle_{H \times K} := \langle x_1, x_2\rangle_H + \langle y_1, y_2\rangle_K$ define un producto escalar en $H \times K$.

9. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar en un espacio vectorial complejo H. Verifica que $\langle x, y\rangle_r := \mathrm{Re}\, \langle x, y\rangle$ es producto escalar en H como espacio vectorial real.

10. Sea H un espacio de Hilbert y $\{x_n\} \subseteq H$ una sucesión de elementos ortogonales entre sí. Si la sucesión de sus sumas parciales es acotada, prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

11. Prueba que la norma en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ no proviene de un producto escalar.

12. Para $x = (a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in X := \ell^1$, definamos $\varphi(x) := \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{j}) a_j$.

i) Encuentra $\|\varphi\|$.

ii) Prueba que $|\varphi x| < \|\varphi\| \|x\|$, $\forall\, x \in X \setminus \{0\}$. Así, $\|\varphi\|$ no se alcanza en B_X.

Para entregar y revisarse el viernes 12 de mayo, 2023

SUGERENCIAS

3*. Considera el espacio cociente X/W.