ANALISIS FUNCIONAL I: TAREA 13

Enseguida X y Y son espacios normados y H es un espacio de Hilbert.

1. Si X y Y son separables, prueba que $X \times Y$ también lo es.

2*. Sean $x_1, \ldots, x_n \in X$ vectores linealmente independientes. Prueba que existe $r > 0$ tal que si $v_1, \ldots, v_n \in X$ y $\|v_j - x_j\| < r,\ j = 1, \ldots, n$, entonces $v_1, \ldots, v_n$ también son linealmente independientes.

3. Sean X un espacio de Banach y $V, W \subseteq X$ subespacios cerrados tales que $X = W \oplus V$. Prueba que X/W y V son topológicamente isomorfos.

4. Considera en $\mathbb{R}$ su topología usual y encuentra una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya gráfica sea cerrada y que no sea continua.

5. Sean H y K espacios pre-Hilbert y $T : H \to K$ un operador lineal. Prueba que T es una isometría si, y sólo si, T preserva el producto escalar.

6. Sea H un espacio de Hilbert. Si $V, W \subseteq H$ son subespacios cerrados y $V \perp W$, prueba que el subespacio $V + W$ también es cerrado.

7. Sea H un espacio pre-Hilbert real.

i) Define en $H_{\mathbb{C}}$ el producto escalar “natural”y sea $\|\cdot\|_2$ su norma respectiva.

ii) Prueba que las normas $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

8. Si $W \subseteq H$ es un subespacio cerrado, prueba que H/W es isométricamente isomorfo con con $W^{\perp}$.

9. Verifica que el sistema trigonométrico $\mathcal{S} \subseteq C_2$ es un sistema ortogonal y encuentra la norma de cada uno de sus elementos.

10. Sea X un espacio de Banach. Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es una serie en X que es absolutamente convergente, prueba que converge incondicionalmente.

11. Sea φ como en el ejercicio 12.12 y tomemos $N = N(\varphi)$.

i) Encuentra $d(e_2, N)$. ii) Verifica que $d(e_2, N) < d(e_2, x), \forall\, x \in N$.

Para revisar y entregarse el viernes 19 de mayo, 2023

SUGERENCIAS

1*. Considera el ejercicio 12.2.