ANALISIS FUNCIONAL I: TAREA 14

Enseguida X y Y son espacios normados y H es un espacio de Hilbert.

1. Sea W un subespacio cerrado de X. Si X es separable, prueba que X/W es separable.

2. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Si T es suprayectivo y $\dim Y < \infty$, prueba que T preserva abiertos. (Obs.: T puede no ser acotado.)

3*. Sean H un espacio pre-Hilbert y $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en H. Sea $B := \{v_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - v_n\|^2 < 1$, prueba que B es un sistema linealmente independiente.

4. Si $S = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ es un sistema ortonormal, prueba que $\overline{\langle S \rangle} - \{\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n : \{a_n\} \in \ell^2\}$. Justifica tu respuesta.

5. Sean G y H espacios de Hilbert. Si $U : G \to H$ es un operador lineal unitario, prueba que U preserva bases ortonormales.

6*. Sean $H = \ell^2(\mathbb{C})$ y $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ su base ortonormal canónica. Tomemos $V = \{\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_{2n-1} : \{a_n\} \in H\}$. Si $v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_{2n-1} \in V$, definamos $Tv = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e_{2n}$ y $W = \{v + Tv : v \in V\}$. Prueba:
i) V y W son subespacios cerrados. ii) $V + W$ no es cerrado.

7. Sea $R : H \to H^*$ el operador de representación de Riesz. Prueba que la función $\langle Rx, Ry \rangle_{H^*} := \langle y, x \rangle_H$ define un producto escalar en H^*.

8. Sea $V \subseteq H$ un subespacio vectorial cerrado y P la proyección ortogonal sobre V. Prueba que P es un operador autoadjunto.

9*. Sea $\varphi \in X^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$ y tomemos $N := N(\varphi)$. Prueba que $d(x, N) = |\varphi(x)|, \ \forall\, x \in X$.

Definición Sea X un espacio vectorial con una seminorma. Entonces, los conceptos de sucesión convergente, de sucesión de Cauchy, y de completez se definen de igual forma que en el caso de un norma.

10. Sea X un espacio seminormado y $N := \{x \in X : \|x\| = 0\}$. Si X es completo, prueba que el espacio normado X/N también es completo.

Enseguida $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto medible y λ la medida de Lebesgue.

11. Sean $f, f_n : \Omega \to \mathbb{C}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Si cada f_n es medible y $f_n \to f$, prueba que f es medible.

12. S $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$. Si f ies medible y $g = f$ c.t.p., prueba que g es medible.

Para entregarse el lunes 29 de mayo, 2023

SUGERENCIAS

3*. Considera el ejercicio 12.2.

6*. ii) Observa que $\langle v, Tx \rangle = 0, \forall\, v, x \in V$ y que $V + W$ es denso en H.

9*. Considera $x \in X \setminus N$, expresa la condición dada mediante $\tilde{\varphi} : X/N \to \mathbb{K}$ y observa que $\|\tilde{\varphi}\| = \left|\tilde{\varphi}\left(\frac{[x]}{\|[x]\|}\right)\right|$.)