ANALISIS FUNCIONAL 1: TAREA 15

A continuación X y Y son espacios normados, (Ω, Σ) un espacio medible y μ una medida definida en Σ.

1. Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Para $f \in C([0,1], \mathbb{C})$ definamos $\varphi(f) = af(0) + bf(1)$. Verifica que $\varphi \in C([0,1], \mathbb{C})^*$ y calcula $\|\varphi\|$.

2. i) Define cuándo una función $T : X \to Y$ es débilmente lineal.

ii) Si $T : X \to Y$ es lineal, prueba que T es débilmente lineal.

Definición Sea V un espacio vectorial. Una *base (de Hamel)* de V es una colección linealmente independiente $\mathcal{B} := \{v_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq V$ tal que $V = \langle \mathcal{B} \rangle$.
3*. Prueba que todo espacio vectorial $V \neq \{0\}$ tiene una base de Hamel.

Definición Para $y \in Y$ y $\varphi \in X^*$ definimos la función $y \otimes \varphi : X \to Y$ por $(y \otimes \varphi)x := \langle x, \varphi \rangle y$.
4. Observa que $y \otimes \varphi$ es lineal y encuentra $\|y \otimes \varphi\|$, $\forall\, y \in Y, \varphi \in X^*$.

Notación Si X es un espacio normado complejo, denotaremos por $X_{\mathbb{R}}$ el "mismo"espacio normado, pero considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
5. Sea X un espacio normado complejo. Prueba que $J(\varphi) = \operatorname{Re} \varphi$ define un isomorfismo isométrico entre $(X^*)_{\mathbb{R}}$ y $(X_{\mathbb{R}})^*$.

6. Sea $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$. En el subespacio $V = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ definamos el funcional lineal $\varphi(x, 0) = x$ y observemos que $\varphi \in V^*$. Muestra que φ se puede extender, conservando su norma, de varias formas a X.

7. Sea H un espacio de Hilbert. Si V es un subespacio cerrado de H y $T \in \mathcal{L}(V, X)$, prueba que T se puede extender a H sin aumentar su norma.

8*. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$. Si $x_n \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$, prueba que existe $\varphi \in X^*$ tal que $\varphi(x_n) \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

9. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ un conjunto linealmente independiente. Prueba:
i) Existe $\{\varphi_n\} \subseteq X^*$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(x_j) = 1$ si $j = n$ y $\varphi_n(x_j) = 0$ si $1 \leq j < n$.

10. Sea V un subespacio vectorial de X. Prueba que $\overline{V}^* = V^*$. (Identificados mediante un isomorfismo isométrico natural.)

11. A partir del caso real, prueba el teorema de convergencia dominada para funciones complejas.

Definición. La *transformada de Fourier* de una función $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es la función $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida por

$$\widehat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \exp^{-i\langle x,s\rangle} f(s)d\lambda_n,$$

donde $i^2 = -1$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

12. Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ prueba que $\widehat{f}$ está bien definida, que es continua y que es acotada.

Para entregarse el viernes 9 de junio, 2023

SUGERENCIAS

3*. Considera el lema de Zorn.

8*. Ten presente el teorema de Baire.