ANALISIS FUNCIONAL 1: TAREA 16

A continuación V y W son espacios vectoriales, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible y X, Y son espacios normados.

1*. Sean $X \neq \{0\}$ y $V \subseteq X$ un subespacio que no es denso en X. Si X es separable, prueba que existe un conjunto $S \subseteq X$ tal que:

i) S es numerable y linealmente independiente.

ii) $\overline{V} \cap \langle S \rangle = \{0\}$ y $V + \langle S \rangle$ es denso en X.

2. Sea H un espacio de Hilbert. Si $T : H \to H$ es inyectivo y tiene rango cerrado, prueba que T es suprayectivo.

3*. Si X es un espacio de Banach y $\dim X = \infty$, prueba que X no tiene una base de Hamel contable.

4. Prueba que todo espacio de Hilbert tiene una base ortonormal.

5. Prueba que $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, \varphi\rangle| : \|x\| \leq 1, \|\varphi\| \leq 1\}, \forall\, T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

6. Prueba que $\dim X^* = \dim X$.

7. Si $T : X \to Y$ es lineal y débilmente continuo, prueba que T es continuo.

8. Sean H un espacio de Hilbert y V un subespacio de H. Si $f \in V^*$, prueba que la extensión señalada por el teorema de Hahn-Banach es única.

9. Sean $p \in (1, \infty)$ y q su exponente conjugado. Prueba la desigualdad de Hölder: $\int_\Omega |f||g|\, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q, \ \forall\, f, g \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$.

10. Determina si la función $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}, x \in (0, 1]$, es esencialmente acotada.

11. (Véase el ejercicio 15.12) Sea $T : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to B(\mathbb{R}^n)$ el operador de Fourier definido por $Tf = \widehat{f}$. Prueba que T es un operador lineal y acotado.

12. Para $f \in X := L^2(0, 1)$, definamos $Tf(x) := \int_0^x f(s)\, ds, \ \forall\, x \in [0, 1]$.

i) Verifica que $Tf \in X$ y $T \in \mathcal{L}(X)$.

ii) Establece que $\|T\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Para revisar y entregarse el 7 de diciembre, 2022

SUGERENCIAS

1*. Observa que $X/\overline{V}$ es separable.

3*. Considera el teorema de Baire.