ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 2

Enseguida U, V y W son espacios vectoriales y X y Y tienen una norma.

Definición Dado un espacio vectorial real V, sea

$$V_{\mathbb{C}} := \{x + iy : x, y \in V\}, \ \ i = \sqrt{-1}.$$

En $V_{\mathbb{C}}$ consideraremos las operaciones definidas por

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
$$(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx), \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}, \ x, y \in V.$$

1. Verifica que $V_{\mathbb{C}}$ es un espacio vectorial complejo. A $V_{\mathbb{C}}$ lo llamaremos *complejificación de V*.

2. Si $S : V \to W$ y $T : W \to U$ son operadores lineales, prueba que su composición $T \circ S : V \to U$ también lo es.

3. Sea $T : V \to W$ un operador lineal. Si $W_0 \subseteq W$ es subespacio vectorial, prueba que la imagen inversa $T^{-1}(W_0)$ es subespacio vectorial de V. Concluye que su núcleo $N(T)$ es un subespacio vectorial de V.

4. Si $T : V \to W$ es un isomorfismo, prueba que su función inversa $T^{-1} : W \to V$ es lineal.

5. Si $W \subseteq U \subseteq V$, prueba que $\mathrm{codim}_U W \leq \mathrm{codim}_V W$.

6. Si $V = W \oplus U$, prueba que el espacio cociente V/W es isomorfo con U.

7. Si $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, prueba que $\sum_{j=1}^n a_j^p \geq (\sum_{j=1}^n a_j)^p, \ \forall\, p \in (0, 1)$.

8. Sea $0 < p < r \leq \infty$. Si $x \in \mathbb{K}^n$, prueba que $\|x\|_r \leq \|x\|_p$.

9. Prueba que $\|(x, y)\|_{X \times Y} := \text{máx}\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$ es una norma en el espacio producto $X \times Y$. En adelante, cuando consideremos a $X \times Y$ como espacio normado, supondremos que la norma correspondiente es $\|(\cdot, \cdot)\|_{X \times Y}$.

10. Si $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ es una colección (no vacía) de subconjuntos convexos de V, prueba que $\cap_{\alpha \in J} A_\alpha$ es convexo.

11. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X y tiene una subsucesión convergente, prueba que $\{x_n\}$ converge.

12. Sean $X = B((0, 1), \mathbb{R})$ y $f_n(x) = x^n, \ 0 < x < 1, \ n \in \mathbb{N}$. Observa que $\{f_n\} \subseteq X$ y determina si $\{f_n\}$ es convergente en X.

Para revisar y entregarse el viernes 17 de febrero, 2023.