ANALISIS FUNCIONAL 1: TAREA 3

Enseguida V, W y Z son espacios vectoriales y X y Y espacios normados.

Definición Sean V y W espacios vectoriales reales. Si $T : V \to W$ es lineal definamos

$$T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}} \text{ por } T_{\mathbb{C}}(x+iy) := T(x) + iT(y).$$

1. Prueba que $T_{\mathbb{C}}$ es $\mathbb{C}$-lineal.

2*. Sean W y Z subespacios vectoriales de V. Si $\dim W > \mathrm{codim} Z$, prueba que $W \cap Z \neq \{0\}$.

3. Si $T : V \to W$ es lineal prueba que T preserva conjuntos convexos.

4. Prueba:

i) $\|x\| \leq \|(x,y)\|, \|y\| \leq \|(x,y)\|$ y $\|(x,y)\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall\, x \in X, y \in Y$.

ii) Sean $\{x_n\} \subseteq X$ y $\{y_n\} \subseteq Y$. Entonces $\{(x_n, y_n)\} \subseteq X \times Y$ es convergente si, y sólo si, $\{x_n\} \subseteq X$ y $\{y_n\} \subseteq Y$ lo son.

Definición Una función $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ es una *seminorma* si tiene las propiedades de una norma, excepto que puede haber elementos $x \in V$ tales que $x \neq 0$ y $\rho(x) = 0$.

5. Si $\| \cdot \|$ es una seminorma en V, prueba que el conjunto $\{x \in V : \|x\| = 0\}$ es un subespacio vectorial.

6. Si $x \in \mathbb{K}^n$, prueba que $\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p$.

7*. Si toda serie en X que es absolutamente convergente, también converge, prueba que X es completo.

8. (Desigualdad de Hölder) Sean $1 \leq p \leq \infty$ y q su exponente conjugado. Si $x = \{a_n\} \in \ell^p$ y $y = \{b_n\} \in \ell^q$, prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$ es convergente y $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n} \right| \leq |x\|_p \|y\|_q$.

9. Prueba:

i) Si $0 < p < r < \infty$, entonces $\ell^p \subseteq \ell^r$. ii) Si $0 < p < \infty$, entonces $\ell^p \subseteq c_0$.

10. Prueba que c_0 es un espacio de Banach.

11. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Si $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, $f \geq 0$ y $\int_a^b f = 0$, prueba que $f = 0$.

12. Propón para una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ lo correspondiente a la norma p, $1 \leq p < \infty$.

Para entregar y revisarse el viernes 24 de febrero, 2023

SUGERENCIAS

2*. Supón que $W \cap Z = \{0\}$ y considera el operador natural de W en V/Z.

7*. Considera el ejercicio 2.11.