ANALISIS FUNCIONAL I: TAREA 4

Enseguida V, W y Z son espacios vectoriales y X un espacio normado.

1*. Sea X un espacio normado real. Prueba que la función

$$\|x + iy\|_{\mathbb{C}} := \sup_{0\leq t\leq 2\pi} \|x\cos t + y \operatorname{sen} t\|$$

define una norma en la complejificación $X_{\mathbb{C}}$.

2. Sea $\varphi : V \to \mathbb{K}$ un funcional lineal, $\varphi \neq 0$.

i) Prueba que V se puede expresar como $V = N(\varphi) \oplus W$, donde $\dim W = 1$.

ii) Determina $\operatorname{codim} N(\varphi)$.

3. Sea $T : V \to W$ un operador lineal. Si $B \subseteq W$ es convexo, prueba que $T^{-1}(B)$ es convexo.

4. Si X y Y son espacios de Banach, prueba que $X\times Y$ también lo es.

Definición Sean $\|\cdot\|$ una seminorma definida en V y $N := \{x \in V : \|x\| = 0\}$. En el espacio cociente V/N definamos la función $\|\cdot\|_s$ por $\|[x]\|_s := \|x\|$.

5. Prueba que $\|\cdot\|_s$ es una norma, a la cual llamaremos *norma inducida por la seminorma* $\|\cdot\|$.

6. Sea $0 < p < r \leq \infty$. Prueba que la contención $\ell^p \subseteq \ell^r$ es propia.

7. Sea $0 < p < 1$ y definamos $\rho : \ell^p \to [0, \infty)$ por $\rho(x) := \|x\|_p^p$. Prueba:

i) $\rho(x) = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.

ii) $\rho(\lambda x) = |\lambda|^p \rho(x)$.

iii) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

Definición Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Para una función R-integrable $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ definamos $\|f\|_p := \int_a^b |f|$.

8. Prueba que $\|\cdot\|_p$ es una norma en $C([a, b], \mathbb{K})$.

9. Determina si el espacio normado $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$ es completo.

10. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$.

i) Si $f : [a, b] \to [a, b]$ es continua prueba que f tiene un punto fijo.

ii) ¿Es único?

Para entregar y revisarse el viernes 3 de marzo, 2023

SUGERENCIAS

1*. Para establecer la homogeneidad, expresa $\lambda \in \mathbb{C}$ como $\lambda = re^{i\theta}$ donde $r \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$.