ANALISIS FUNCIONAL I: TAREA 5

Enseguida V es un espacio vectorial, E y C son espacios topológicos, M es un espacio métrico y X un espacio normado.

1. Sea W un subespacio vectorial de V.

i) Prueba que $\dim V = \dim W + \mathrm{codim} W$.

ii) Observa que si $\dim W < \infty$ y $\mathrm{codim} W < \infty$, entonces $\dim V < \infty$.

2. Si $K \subseteq V$ es convexo y $x_1, \ldots, x_n \in K$, $t_1, \ldots, t_n \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$, prueba que $\sum_{k=1}^{n} t_k x_k \in K$.

3. Sean X y Y espacios vectoriales y $T : X \to Y$ un operador lineal. Si $\|\cdot\|$ es una norma en Y, definamos $\|x\|_T := \|Tx\|$.

i) Prueba que $\|\cdot\|_T$ es una seminorma.

ii) Determina cuándo $\|\cdot\|_T$ es una norma.

4. Sean X y Y espacios normados. Si el espacio normado $X \times Y$ es completo, prueba que X y Y también lo son.

5*. Sea $r \in [1, \infty)$. Si $x \in \ell^r$, prueba que $\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p$.

6. Si $f : E \to C$ es una función continua, prueba que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, $\forall\, A \subseteq E$.

7. Si $h : E \to C$ es un homeomorfismo, prueba que $h(\overline{A}) = \overline{h(A)}$ y $h(A^0) = h(A)^0$, $\forall\, A \subseteq E$.

8. Si $A \subseteq E$, prueba que τ_A es una topología en A.

9. Sea $A \subseteq E$. Prueba que $B \subseteq A$ es cerrado en A (esto es, cerrado bajo τ_A) si, y sólo si, $B = A \cap K$, donde K es cerrado en E.

10. Sean $f : E \to C$ y $A, B \subseteq E$. Si A y B son cerrados, $A \cup B = E$ y las restricciones $f|_A$, $f|_B$ son continuas, prueba que f es continua.

11. Sean (M, d) un espacio métrico y $A \subseteq M$. Denotemos por d_A la restricción de d a A. Observa que d_A es una métrica en A y prueba que la topología en A inducida por d_A es τ_A.

12. Encuentra una función continua $f : (0, 1] \to (0, 1]$ sin puntos fijos.

Para entregar y revisarse el viernes 10 de marzo, 2023.

SUGERENCIAS

5*. Establece que existe $c \in (0, \infty)$ tal que $\|x\|_p \leq c^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty, \ \forall \, p \geq r$.