ANALISIS FUNCIONAL I: TAREA 6

A continuación V es un espacio vectorial, E un espacio topológico, M y N son espacios métricos y X y Y espacios normados.

1. Sea W un subespacio de V. Si $\mathrm{codim} W < \infty$, prueba que V se puede expresar como $V = W \oplus Z$.

2. Sea X un espacio normado.

i) Verifica que $\mathcal{S} := \{\{x_n\} : \{x_n\} \text{ es de Cauchy en } X\}$ es espacio vectorial.

ii) Si $\{x_n\} \in \mathcal{S}$, prueba que $\{\|x_n\|_X\}$ converge.

3. Sean X y Y espacios normados. Si $1 \leq p < \infty$, prueba que la función $\|(x,y)\|_p := \|(\|x\|^p + \|y\|^p)^{\frac{1}{p}}$ es una norma en $X \times Y$.

4. Sea $\{x_n\} \subseteq M$ una sucesión. Prueba que $x_n \to x \in M$ (definición topológica) si, y sólo si, $d(x_n, x) \to 0$ (definición métrica).

5. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones en M y definamos la sucesión $\{z_k\}$ por $z_{2n-1} = x_n, z_{2n} = y_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Si $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ convergen a un mismo punto, prueba que $\{z_k\}$ también.

6. (Continuación del ejercicio 4.7.) Sea $0 < p < 1$. Prueba:

iv) La función $d_p(x,y) := \rho(x-y)$ es una métrica en ℓ^p.

v) Con la métrica d_p, el espacio ℓ^p, es completo.

7. Sea $f : M \to N$. Prueba que f es continua en $p \in M$ si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(p)) \leq \epsilon$, si $x \in M$ y $d(x,p) \leq \delta$.

8. Para cada $N \in \mathbb{N}$, sea $a_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n}$. Prueba que la suesión $\{a_N\}$ converge y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ no.

9. Encuentra una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que preserve sucesiones de Cauchy y no sea uniformemente continua.

10. Supongamos que los espacios métricos M y N son completos y $D \subseteq M$. Si $J : D \to N$ es una isometría, prueba que su extensión $\overline{J}$ a $\overline{D}$ también es una isometría y $\overline{J}(\overline{D}) = \overline{J(D)}$.

11. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, y $f : A \to \mathbb{R}^m$. Si A es un conjunto acotado y f es uniformemente continua, prueba que f es acotada.

12. Sean $f_n : E \to M, \forall\, n \in \mathbb{N}$, y $f : E \to M$. Si cada f_n es continua en $p \in E$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente a f, prueba que f es continua en p.

Para entregar y revisarse el viernes 17 de marzo, 2023.