ANALISIS FUNCIONAL I: TAREA 7

A continuación V, W y Z son espacios vectoriales, E es un espacio topológico, M y N son espacios métricos y X y Y son espacios normados.

1*. Sean W y Z subespacios vectoriales de V. Si codim$W < \infty$ y codim$Z < \infty$, prueba que codim$(W \cap Z) < \infty$.

2. (Continuación del ejercicio 6.2.) Sea X un espacio normado y $\mathcal{S} := \{\{x_n\} : \{x_n\}$ es de Cauchy en $X\}$.
iii) Para una sucesión $\{x_n\} \in \mathcal{S}$ definamos $\rho(\{x_n\}) := \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$. Prueba que ρ es una seminorma en $\mathcal{S}$.
iv) Observa que $\mathcal{S}_0 := \{\{x_n\} \subseteq X : x_n \to 0\} = \{\{x_n\} \subseteq X : \rho(\{x_n\}) = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}$.

3. Si X es un espacio de Banach real, prueba que su complejificación $X_{\mathbb{C}}$ también es un espacio de Banach.

4. Sea $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función (de Heaviside), definida por $H := \chi_{(0,\ \infty)}$. Para cada $c \in \mathbb{R}$, definamos $T(c) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $T(c)(x) = H(x + c)$. Determina si $T : \mathbb{R} \to B(\mathbb{R})$ es continua.

Definición a) El *soporte* (topológico) de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es la cerradura del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ y se denotará por sop$f$.
b) El conjunto $C_c(\mathbb{R}^n)$ consiste de las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ que son continuas y cuyo soporte es compacto.

5. Si $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, prueba que f es uniformemente continua.

6. Sea $A \subseteq \mathbb{K}^n$ un conjunto no-vacío y cerrado. Dado $x \in \mathbb{K}^n$, prueba que existe $a \in A$ tal que $d(x, A) = d(x, a)$.

7. Si un subespacio vectorial $V \subseteq X$ es acotado, prueba que $V = \{0\}$.

8. Sea E un espacio topológico no-vacío. Si $V, W \subseteq E$ son abiertos y densos, prueba que $V \cap W$ es denso. En particular, su intersección es no vacía.

9*. Prueba que c es separable.

10. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto y no-vacío. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1, prueba que para cada $x \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que f es de Lipschitz en $V_r(x)$.

Para entregar y revisarse el viernes 24 de marzo, 2023

SUGERENCIAS

1*. Construye un operador lineal adecuado de $V/(W \cap Z)$ en $V/W \times V/Z$.

9*. Considera la codimensión de c_0 en c.