ANALISIS FUNCIONAL I: TAREA 8

Enseguida V, W y Z son espacios vectoriales, y X y Y son normados.

Definición Una función $B : V \times W \to Z$ es *bilineal* si, para cada $v_0 \in V$ y $w_0 \in W$, las funciones $w \to B(v_0, w)$ y $v \to B(v, w_0)$ son lineales.

1. Prueba que, con las operaciones usuales entre funciones, las funciones bilineales $B : V \times W \to Y$ forman un espacio vectorial.

2. (Continuación del ejercicio 7.2.) Consideremos en $\mathcal{S}$ la relación de equivalencia $\sim$ determinada por $\mathcal{S}_0$: $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n\} - \{y_n\} \in \mathcal{S}_0$.

v) Prueba que $\|\{x_n\}\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X$ es una norma en $\mathcal{S}/\mathcal{S}_0$.

vi) Si X es completo, prueba que X y $\mathcal{S}/\mathcal{S}_0$ son isomorfos.

3. Si $V \subseteq X$ es un subespacio vectorial y V^0 es no-vacío, prueba que $V = X$.

4. Sean X un espacio normado y $v_0, v_1, \ldots, v_n \in X$. Prueba que la función $P : \mathbb{K} \to X$ definida por $P(z) = v_0 + zv_1 + \cdots + z^n v_n$ es continua.

5. Sea D un conjunto no-vacío y $X = B(D, \mathbb{R})$. Para $f \in X$, definamos $S(f) := \sup\{f(x) : x \in D\}$. Prueba que $S : X \to \mathbb{R}$ es continua.

6. Sea E un espacio topológico. Prueba:

i) Si $B \subseteq A \subseteq E$ y A es de la primera categoría, entonces B también lo es.

ii) La unión numerable de conjuntos de la primera categoría también lo es.

7*. Sean $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto no-vacío y $f : K \to K$. Si $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ cuando $x, y \in M$ y $x \neq y$, prueba:

i) f tiene un único punto fijo x.

ii) Si $x_0 \in K$, entonces $\{f^n(x_0)\}$ converge a x.

8*. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $p \in [1, \infty)$. Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es continua, prueba que $\| \int_a^b g\|_p \leq \int_a^b \|g\|_p$.

9. i) A partir de la función constante $f_0 = 1$, construye las dos primeras iteraciones de Picard para el problema $\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2$, $x(0) = 1$.

ii) Prueba que la solución al problema anterior existe y es única en [-0.22,0.22].

10. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1, $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Si f es acotada, prueba que la solución del problema $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, existe en todo $\mathbb{R}$.

11. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto y no-vacío y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Si f es de clase C^1, prueba que f es de Lipschitz en cada conjunto compacto $K \subseteq \Omega$.

Para revisar y entregarse el viernes 31 de marzo, 2023

SUGERENCIAS

7*. i*) Considera la función $h(x) := d(f(x), x),\ x \in K$.

ii) Observa que la sucesión $\{d(f^n(x_0), p)\}$ es convergente. Después procede por contradicción y encuentra $x \in K$ tal que $d(x, p) = d(f(x), p)$.

8*. Considera la prueba realizada en clase para $p = 2$.