ANALISIS FUNCIONAL I: TAREA 9

Enseguida V y W son espacios vectoriales y X, Y y y Z son normados.

Definición La *nulidad* de un operador lineal $T : V \to W$ se define por $\alpha(T) := \dim N(T)$.

1. Si $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ son operadores lineales, prueba que $\alpha(ST) \leq \alpha(T) + \alpha(S)$.

2. Si $T : V \to W$ es un operador lineal, prueba que su gráfica $G(T) \subseteq V \times W$ es un subespacio vectorial.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y tomemos $I = [a, b]$. Entonces

$$C^1(I) := \{f : I \to \mathbb{R},\ f \text{ es de clase } C^1\}.$$

3. Prueba: i) $C^1(I)$ es un espacio vectorial.

ii) $\|f\|_{C^1} := \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$ es una norma en $C^1(I)$.

iii) Con esta norma, el espacio $C^1(I)$ es completo.

4.* Si K es un conjunto métrico compacto, prueba que $C(K, \mathbb{K})$ es isométricamente isomorfo con un subespacio de $\ell^\infty(\mathbb{K})$.

5*. Sean E un espacio topológico y M un espacio métrico. Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : E \to M$ es una función continua y $f_n(x) \to f(x), x \in E$. Para cada $k, n \in \mathbb{N}$ definamos $A_{k,n} = \{x \in M : d(f_n(x), f_j(x)) \leq \frac{1}{k},\ j \geq n\}$ y $A_k = \bigcup_n A^0_{k,n}$. Si $x \in \cap_{k=1}^\infty A_k$, prueba que f es continua en x.

6*. Sea M un espacio métrico completo no-vacío. Si M no tiene puntos aislados, prueba que M es no-numerable.

7. Encuentra una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ si $x \neq y$, y que no tenga puntos fijos.

8*. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Si f es continua y $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe y es acotada en $\mathbb{R}^2$, prueba que la solución del problema $\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$, existe en todo $\mathbb{R}$.

9. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Prueba que T no es acotado si, y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq X$ tal que $x_n \to 0$ y $\|Tx_n\| = 1$.

10. Si $\{T_n\} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ es una sucesión acotada, $D \subseteq X$ es total y $T_n \to 0$ en D, prueba que $T_n \to 0$ en X.

11. Sea $B : X \times Y \to Z$ una función bilineal. Prueba que B es continua si, y sólo si, existe $c \geq 0$ tal que $\|B(x; y)\| \leq c\|x\|\ \|y\|, \forall\, x \in X, y \in Y$.

12. Sean $p \in [1, \infty)$ y $C^n_p := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$. Encuentra $\|\varphi\|$, donde $\varphi : C^n_p \to \mathbb{C}$ está definida por $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \ldots + a_n$.

Para revisar y entregarse el viernes 21 de abril, 2023

SUGERENCIAS

1*. Considera los operadores lineales $T : N(ST) \to N(S)$ y $S : N(S) \to Z$.)

4*. Ten presente que K es separable.

5*. Observa que si $x \in A^0_{k,n}$, entonces $d(f_n(x), \leq f(x)) \leq \frac{1}{k}$.

6*. Considera el teorema de Baire.

8*. Considera la *prueba* del teorema de existencia y unicidad.