Enero-Junio 2015

ANÁLISIS FUNCIONAL 2

En este curso continuaremos con el estudio de los espacios de Banach y de los operadores lineales acotados definidos entre ellos.

TEMARIO

0. TEMA PENDIENTE
0.5. Teorema de acotamiento uniforme.

I. DUALIDAD
1.5. Espacio dual. Orden parcial, lema de Zorn.
2.5. Teorema de Hahn-Banach y consecuencias.
3.5. Espacio dual de un espacio de Hilbert y de ℓ^p, $1 \leq p < \infty$.
4.5. Apareamiento dual, identificación canónica, espacios anuladores.
5.5. Operador transpuesto T', propiedades básicas. Relación de $R(T)$ con $N(T')$ y de $N(T)$ con $R(T')$.
6. Espacio dual de un subespacio y de un espacio cociente.
7. Operadores con rango cerrado. T es un isomorfismo si, y sólo si, T' lo es. $R(T)$ es cerrado si, sólo si, $R(T')$ lo es.

II. ESPACIO DE FUNCIONES CONTINUAS EN UN COMPACTO
8. Compacidad.
9. Álgebra de funciones escalares continuas definidas en un compacto.
10. Teorema de Stone-Weierstrass. Separabilidad de $C(K)$, siendo K un espacio métrico compacto.
11.5. Densidad de $C_c(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Separabilidad de $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.
13. Aplicaciones: base ortonormal clásica, existencia de una serie de Fourier que no converge an algún punto.

III. ESPECTRO DE UN OPERADOR LINEAL ACOTADO
13.5. Álgebra de Banach formada por los operadores lineales acotados.
14.5. Funciones polinomiales y funciones enteras de un operador lineal acotado.
16. Grupo de operadores invertibles. Serie de Neumann. Continuidad de la inversión.
17. Espectro $\sigma(T)$. Operador de Volterra. $\sigma(T) = \sigma(T')$.
18. Radio espectral. Operador unitario. Compacidad de $\sigma(T)$.
19.5. Función resolvente. Caso complejo: $\sigma(T) \neq \emptyset$, fórmula de Gelfand, $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$, si P es un polinomio.

IV OPERADORES COMPACTOS

20. Estructura de espacio de Banach y cerrado bajo la composición. Operadores de rango finito. T es compacto si, y sólo si, T' lo es.
21. Ejemplos: Operadores integrales de núcleo continuo.
21.5. Lema de Riesz. No-compacidad de la bola unitaria en el caso de dimensión infinita.
22. Proyección y espacio complementable.
24. Operadores semiFredholm. Índice. Invariancia bajo perturbaciones compactas.
25. Espectro de un operador lineal compacto.
26. Teorema de Lomonosov sobre subespacios invariantes.

V. OPERADORES AUTOADJUNTOS

27. Operador adjunto. Propiedades básicas. Álgebra C^*.
28.5. Operador autoadjunto. Partes real e imaginaria de un operador lineal acotado. Proyección ortogonal. Formas sesquilineal y cuadrática. Fórmula de polarización. Espectro.
30. Operador normal. Rango numérico, radio numérico. Igualdad del radio espectral y la norma de un operador normal.
31. Teorema espectral para un operador compacto autoadjunto.
32.5. Cálculo funcional de un operador autoadjunto.
33. Aplicación al problema del subespacio invariante.

BIBLIOGRAFIA

1. F. Galaz Fontes, *Elementos de análisis funcional.* CIMAT, México, 2006.
2. H. Fetter y B. Gamboa, *Introducción al análisis funcional y a la geometría de espacios de Banach.* CIMAT, 2008.
3. A. Kolmogorov and S. Fomín, *Introductory real analysis.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J., 1970.
4. J. A. Canavati, *Introducción al análisis funcional.* Fondo de Cultura Económica, 1998.
5. S. Lang, *Real analysis.* Addison-Wesley, Reading Mass., 1983.
6. F. Riesz and B. Sz Nagy, *Functional analysis.* Frederick Ungar, New York, 1958.
7. W. Rudin, *Functional analysis.* McGraw-Hill, 1991.
8. W. Rudin, *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, New Delhi, 1978.

Fernando Galaz Fontes

Enero 13, 2015