ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 1

1. Fijemos $p \in [1, \infty)$ y $b \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$. Supongamos que $bx \in \ell^1(\mathbb{K}),\ \forall\, x \in \ell^p$, y definamos $M_b : \ell^p \to \ell^1$ por $M_b(x) := bx$. Prueba que M_b es un operador lineal acotado. (Sug.: considera el teorema de la gráfica cerrada.)

2. Sea V un espacio vectorial complejo. Si $f : V \to \mathbb{R}$ es un funcional $\mathbb{R}$-lineal y $F(x) := f(x) - if(ix)$, prueba que F es un funcional lineal complejo.

Notación Si Z es un espacio normado complejo, denotaremos por $Z(\mathbb{R})$ el "mismo"espacio normado, pero considerado sobre $\mathbb{R}$.

3. Sea X un espacio normado complejo. Prueba que $J(x^*) = \mathrm{Re} x^*$ define un isomorfismo isométrico entre $X^*(\mathbb{R})$ y $X(\mathbb{R})^*$.

A continuación X y Y siempre son espacios normdos.

4. Sea V un subespacio vectorial de X. Prueba que $\overline{V}^* = V^*$. (Identificados mediante un isomorfismo isométrico natural.)

5. i) Define cuándo una función $T : X \to Y$ es débilmente lineal.

ii) Si $T : X \to Y$ es lineal, prueba que T es débilmente lineal.

6. Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Para $f \in C[0, 1]$ definamos $\varphi(f) := af(0) + bf(1)$. Verifica que $\varphi \in C[0, 1]^*$ y calcula $\|\varphi\|$.

Definición Si $y \in Y$ y $\varphi \in X^*$ definimos la función $y \otimes \varphi : X \to Y$ por $(y \otimes \varphi)x := \langle x, \varphi \rangle y$.

7. i) Observa que $y \otimes \varphi$ es lineal y encuentra $\|y \otimes \varphi\|,\ \forall\, y \in Y, \varphi \in X^*$.

ii) Verifica que la función $B : Y \times X^* \to \mathcal{L}(X, Y)$ definida por $B(y, \varphi) := y \otimes \varphi$ es una función bilineal continua.

Definición Sea V un espacio vectorial. Una *base (de Hamel)* de V es una colección linealmente independiente $\mathcal{B} := \{v_\alpha : \alpha \in I\} \subset V$ que genera a V, esto es, si $v \in V$ entonces existen $n \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{B}$ y $\lambda_1 \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$.

8. Prueba que todo espacio vectorial $V \neq \{0\}$ tiene una base de Hamel.

9. Si X es un espacio normado, prueba que $\dim X = \dim X^*$.

10. Consideremos el espacio de Banach $X := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$. En el subespacio $V = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ definamos el funcional lineal $\varphi(x, 0) = x$ y observemos que $\varphi \in V^*$. Muestra que φ se puede extender, conservando su norma, de varias formas a X.

11. Prueba que $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, \varphi\rangle| : \|x\| \leq 1, \|\varphi\| \leq 1\}, \forall\, T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Para revisar y entregarse el viernes 30 de enero, 2015