ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 2

1. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, $1 < p < \infty$, y $f : \Omega \to \mathbb{K}$ una función medible tal que $gf \in L^1(\Omega), \ \forall g \in L^p(\Omega)$. Prueba que $M_f : L^p(\Omega) \to \mathbb{K}$ definido por $M_f(g) := gf$ es un operador lineal acotado.

A continuación X y Y siempre son espacios normados.

2. Si $T : X \to Y$ es débilmente lineal, prueba que T es lineal.

3. Si X es un espacio de Banach y $\dim X = \infty$, prueba que X no tiene una base de Hamel contable. (Sug.: ten presente el teorema de Baire.)

4. Sea V un subespacio de X. Si $T \in \mathcal{L}(V, Y)$ y $\dim R(T) < \infty$, prueba que T se puede extender continuamente a X.

5. Sean $h, g \in L^2(0,1)$ y $\varphi : L^2(0,1) \to \mathbb{K}$, $\varphi(f) := \int_0^1 g(t)[\int_0^t h(s)f(s)ds]dt$. Prueba que φ está bien definido y que $\varphi \in L^2(0,1)^*$.

6. Sean H un espacio de Hilbert y V un subespacio de H. Si $f \in V^*$, prueba que la extensión señalada por el teorema de Hahn-Banach es única.

7. Si H es un espacio de Hilbert, verifica que la norma en su dual H^* se puede obtener a partir de un producto escalar.

8. Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $b \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$. Si $xb \in \ell^1(\mathbb{K}), \ \forall x \in \ell^p$, prueba que $b \in \ell^q$, siendo q el exponente conjugado de p.

9. Sean V un espacio vectorial y $S := \{v_n : n \in \mathbb{N}\} \subset V$. Si $E(S) \neq \{0\}$, entonces existe $S_0 \subset S$ tal que S_0 es linealmente independiente y $E(S_0) = E(S)$

10. Si $A \subset X$, prueba que $A^\perp \subset X^*$ es un subespacio vectorial cerrado.

11. Sea V un espacio vectorial y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ funcionales lineales definidos en V. Si $f : V \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal tal que $f(x) = 0$ cuando $\varphi_1(x) = \ldots = \varphi_n(x) = 0$, prueba que f es combinación lineal de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Para revisar y entregarse el viernes 6 de febrero, 2015