ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 3

A continuación, X y Y siempre son espacios normados.

1. Sea $\{v_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Si $v_n \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$, prueba que existe $\varphi \in X^*$ tal que $\varphi(v_n) \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$. (Sug.: ten presente el teorema de Baire.)

2. i) Define cuándo $T : X \to Y$ es débilmente continua.

ii) Si T es continua, prueba que T es débilmente continua.

3. Sean K un espacio compacto y $X := C(K, \mathbb{R})$. Si $\varphi : X \to \mathbb{R}$ es una función lineal tal que $\varphi(f) \geq 0$ cuando $f \in X$ y $f \geq 0$, prueba que $\varphi \in X^*$.

4. Sea $V \subset X$ un subespacio que no sea denso en X. Si X es separable, prueba que existe un conjunto $S := \{w_n : n \in I\}$ con las siguientes propiedades:

i) S es numerable y linealmente independiente.

ii) $V \cap E(S) = \{0\}$ y $V + E(S)$ es denso en X. (Sug.: X/V es separable.)

5. Si $\dim X = \infty$, prueba que existen conjuntos linealmente independientes $\{x_1, \ldots,\} \subset X$ y $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots,\} \subset X^*$ tal que $\langle x_i, \varphi_j \rangle = \delta_{i,j}$. (Sug.: si $1 \leq i < j$, observa que $x_i \in N(\varphi_j)$.)

6. Sea V un subespacio de X. Si $T \in \mathcal{L}(V, \ell^\infty)$, prueba que T se puede extender a X sin aumentar su norma.

7. Sea $p \in [1, \infty]$, q su exponente conjugado y $R : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_q) \to (\mathbb{K}^n \|\cdot\|_p)^*$ la representación canónica de Riesz (definida de manera análoga al caso de ℓ^p.) Prueba que R es un isomorfismo isométrico.

Definición Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, $p \in [1, \infty]$ y q su exponente conjugado. Procediendo como en el caso de ℓ^p, definamos el operador de representación $R_p : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$.

8. Prueba que R_1 es una isometría.

9. Si $\dim X = \infty$, prueba que existe $\varphi : X \to \mathbb{K}$ que es lineal y discontinuo. (Sug.: considera una base de Hamel para X.)

10. Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ el operador lineal cuya matriz asociada respecto a las bases canónicas es $A = (a_{i,j}),\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Encuentra la matriz de T' respecto de las bases duales.

11. Prueba que $\dim R(T) = \dim R(T'),\ \forall T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Para revisar y entregarse el viernes 14 de febrero, 2015