ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 4

A continuación, X y Y siempre son espacios normados.

Definición Una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ f *se anula en infinito* si, para cada $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que $|f(x)| \leq \epsilon$ cuando $\|x\| \geq R$. Denotaremos por $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de tales funciones.

1. Verifica que $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^n)$, con la norma del supremo, es un espacio de Banach.

2. Si el espacio normado real X es separable, prueba el teorema de Hahn-Banach sin usar el lema de Zorn. (Sug.: considera el ejercicio 3.4.)

3. Si $T : X \to Y$ es un operador lineal débilmente continuo, prueba que T es continuo.

4. Encuentra el elemento $F \in L^2(0,1)$ que representa al funcional φ definido en el ejercicio 2.5.

5. Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$ y definamos $T : X \to \mathbb{K}^n$ por $Tx := (\varphi_1 x, \ldots, \varphi_n x)$. Prueba que los funcionales $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son linealmente independientes si, y sólo si T es suprayectiva.

6. Determina si c_0 y ℓ^1 son topológicamente isomorfos.

7. (Ejercicio 3.7.) Prueba que $R_\infty : L^1(\Omega) \to L^\infty(\Omega)^*$ es una isometría lineal.

8. Sea $W \subset X^*$ un subespacio. Prueba:

i) $W \subset ({}^\perp W)^\perp$.

ii) Si $\dim W = n < \infty$, entonces $\dim X/{}^\perp W = n$ y $({}^\perp W)^\perp = W$. (Sug.: Considera una base de W, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, y analiza el operador $T : X \to \mathbb{K}^n$ dado por $T(x) := (\varphi_1 x, \cdots, \varphi_n x)$.)

9. Dados $y \in Y$ y $\varphi \in X^*$, encuentra $(y \otimes \varphi)'$.

Definición Sean X y Y espacios de Banach. Entonces

$$\mathrm{Inj}(X,Y) := \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : T \text{ es 1-1 y } R(T) \text{ es cerrado } \}.$$

10. Prueba que $T \in \mathrm{Inj}(X,Y)$ si y sólo si, existe $C > 0$ tal que se cumple $\|Tx\| \geq C\|x\|$, $\forall\, x \in X$.

11. Sean X y Y espacios de Banach. Si X es reflexivo y existe $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ que es suprayectivo, prueba que Y es reflexivo.

Para revisar y entregarse el viernes 20 de febrero, 2015