ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 5

A continuación, X y Y siempre son espacios normados.

1. Sean $\{x_n\} \to X$ y $x \in X$. a) Define cuándo $x_n \to x$ débilmente.

b) Si $x_n \to x$, prueba que $x_n \to x$ débilmente.

2. Sean X un espacio vectorial y $\|\cdot\|_j$ una norma en X, $j = 1, 2$. Hagamos $X_j := (X, \|\cdot\|_j)$, $j = 1, 2$. Si $X_1^* = X_2^*$ (como conjuntos), prueba que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes.

3. (Véase el ejercicio 3.7.) Si $1 < p < \infty$, prueba que $R_p : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$ es una isometría lineal.

4. Sean $s := \{a_n\} \in \ell^\infty$ y $p \in [1, \infty]$. Dada $x := \{b_n\} \in \ell^p$, definamos $T_s x := \{a_n b_n\}$. i) Verifica que $T_s f \in \ell^p$ y $T_s \in \mathcal{L}(\ell^p)$. ii) Encuentra $\|T\|$.

5. Prueba que $\mathrm{Inj}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ es abierto.

6. Sea X un espacio de Banach reflexivo. Prueba: i) Si X y Y son topológicamente isomorfos, entonces Y es reflexivo. ii) Si $V \subset X$ es un subespacio cerrado, entonces X/V es reflexivo.

7. Sean X un espacio de Banach separable y $\{x_n\}$ un subconjunto denso en B_X. Dada $s = \{a_n\} \in \ell^1$, definamos $x_s := \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$. i) Prueba que x_s está bien definido y considera el operador $T : \ell^1 \to X$ definido por $T(s) := x_s$.

ii) Observa que T es lineal y acotado.

iii) Prueba que $T' : X^* \to \ell^\infty$ es una isometría.

iv) Concluye que T es suprayectivo.

Definición Sean X un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ una seminorma en X. Procediendo como en el caso de una norma se obtiene una topología para X. Para referirnos a esta topología diremos que X es un espacio seminormado.

8. Sea X un espacio vectorial con una seminorma $\|\cdot\|$. Prueba que X es de Hausdorff si, y sólo si, $\|\cdot\|$ es una norma.

9. Sea X un espacio normado de dimensión finita y $K \subset X$. Entonces K es un conjunto compacto si, y sólo si, K es cerrado y acotado.

10. Sea M un espacio métrico. Si $K \subset M$ es totalmente acotado, prueba que $\overline{K}$ también lo es.

11. Sean M un espacio métrico y $C, V \subset M$. Si C es cerrado, V es abierto y $C \subset V$, prueba que existe una función continua $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $f = 1$ en C, $0 \leq f \leq 1$, y $f = 0$ en V^c.

Para revisar y entregarse el viernes 27 de febrero, 2015.
Examen parcial 1: martes 3 de marzo.