ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 6

A continuación, X y Y siempre son espacios normados.

1. Sea $1 < p < \infty$. Prueba que la sucesión canónica $\{e_n\}$ converge débilmente a cero en ℓ^p y no converge en ℓ^p.

2. Prueba que $R_\infty : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ no es suprayectiva.

3. Sean $\{a_n\} \in \ell^\infty, p \in [1, \infty)$ y q su exponente conjugado. Si $x = \{b_n\} \in \ell^p$, definamos $Tx := \{a_n b_n\} \in \ell^p$. Encuentra $T' \in \mathcal{L}(\ell^q)$.

4. Prueba que un espacio de Banach X es reflexivo si, y sólo si, X^* lo es.

5. Sea $\varphi \in X^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Prueba que $\operatorname{dist}(x, N(\varphi)) = |\varphi(x)|$, $\forall\, x \in X$.

6. Sea $\{a_n\} \in \ell^2$. Prueba que $\{\{x_n\} \in \ell^2 : |x_n| \leq |a_n|\} \subset \ell^2$ es compacto.

7. (Criterio M de Weierstrass.) Sean E un espacio topológico, X un espacio de Banach y $\{f_n\} \subset C(E, X)$. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $M_n \geq 0$ tal que $\|f_n(x)\| \leq M_n, \forall\, x \in E$, y $\sum_{n=1}^\infty M_n < \infty$, prueba que $f(x) := \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ define una función continua.

8. Sean $p, v \in X$. Prueba que la función $f(t) = \|p + tv\|$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, tiene un valor mínimo.

9. Sea W un subespacio propio de X. Si $\dim W < \infty$, prueba que existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $1 \leq \|x - w\|, \forall\, w \in W$. (Compárese con el lema de Riesz.)

10. Sea E un espacio topológico. Si $A \subset BC(E)$ es un álgebra, prueba que $\overline{A}$ también lo es.

11. Sea K un espacio métrico compacto. Si $A \subset C(K)$ es denso, prueba que A separa puntos de K.

Para revisar y entregarse el viernes 6 de marzo, 2015