ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 7

A continuación, X y Y siempre son espacios normados.

Notación Dado un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $L^0(\Omega)$ el conjunto formado por las funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que son medibles.

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto con medida finita y $1 \leq p \leq \infty$. Si $g \in L^0(\Omega)$ y $\int_\Omega |fg| < \infty, \forall\, f \in L^p(\Omega)$, prueba que $g \in L^q(\Omega)$.

2. Sean $\{x_n\}$ una sucesión en X y $x \in X$. Si $x_n \xrightarrow{w} x$, prueba que $\{x_n\}$ es acotada y $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

3. Si X es reflexivo y $V \subset X$ es un subespacio cerrado, prueba que V es reflexivo.

Definición Dados unos espacios de Banach X y Y, definimos

$$\mathrm{Sob}(X,Y) := \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : T \text{ es suprayectiva } \}.$$

4. Si X y Y espacios de Banach, prueba que $\mathrm{Sob}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ es abierto.

5. Sea K un espacio métrico compacto no-vacío y $\mathcal{A}$ el conjunto de funciones definidas en K^2, de la forma

$$f(x,y) := \sum_{j=1}^n f_j(x) g_j(y),$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $f_j, g_j \in C(K),\ j = 1, \ldots, n$. Prueba que $\mathcal{A}$ es denso en $C(K^2)$.

6. (Teorema de Dini.) Sea K un espacio compacto no-vacío y $\{f_n\} \subset C(K,\mathbb{R})$. Si $0 \leq f_n \leq f_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$, y $f_n(x) \to 0, \forall\, x \in \mathbb{K}$, prueba que $f_n \xrightarrow{u} 0$.

7. Prueba que $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $C_0(\mathbb{R}^n)$.

8. Sean E un espacio topológico, M un espacio métrico, $f, g : E \to M$ y $a \in E$. Prueba $h := (f,g) : E \to M^2$ es continua en a si, y sólo si, f y g son funciones continuas en a.

9. Prueba que $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ no es separable.

Definición Una función $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ es *escalonada* si $s = \sum_{k=1}^j a_k \chi_{R_k}$, donde cada conjunto R_k es de la forma $I_1 \times \ldots \times I_n$ y cada I_j es un intervalo acotado.

10. Prueba que las funciones escalonadas forman un conjunto denso en $L^1(\mathbb{R}^N)$. (Sug.: aproxima primero χ_A donde $\mu(A) < \infty$.)

Definición Sean X un espacio vectorial y $\mathcal{S} := \{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de seminormas definidas en X. Dados $x \in X$, un subconjunto finito $F \subset J$ y $\epsilon > 0$, tomemos $U_{x,F,\epsilon} := \{y \in V : \|y - x\|_\alpha < \epsilon,\ \forall\, \alpha \in F\}$. En seguida definimos que $U \in \tau$, si para cada $x \in U$ existen un conjunto finito $F \subset J$ y $\epsilon > 0$ tales que $U_{x,F,\epsilon} \subset U$.

11. Prueba que la colección τ es una topología en X. En adelante la llamaremos *topología inducida por* $\mathcal{S}$.

Para revisar y entregarse el viernes 13 de marzo, 2015