**ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 8**

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto con medida finita. Prueba:

i) Si $\varphi \in L^1(\Omega)^*$, entonces existe $g \in L^2(\Omega)$ tal que $\varphi(f) = \int_\Omega fg$, $\forall\, f \in L^2(\Omega)$. (Sug.: Observa que $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.)

ii) $g \in L^\infty(\Omega)$. Concluye que operador de Riesz $R_1$ es suprayectivo.

A continuación, $X$ y $Y$ siempre son espacios normados.

2. Sean $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$. Si $x_n \overset{w}{\to} x$ y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, prueba que $Tx_n \overset{w}{\to} Tx$.

**Notación** Sean $p \in [1, \infty]$ y $q$ su exponente conjugado. Dados dos espacios normados $X$ y $Y$, denotemos por $(X \times Y)_p$ al espacio $X \times Y$ con la norma $\|(x, y)\|_p := \|(|x|, |y|)\|_p$.

3. Prueba que $(X^* \times Y^*)_q$ se puede identificar con $(X \times Y)_p^*$ mediante la correspondencia $\langle (x^*, y^*), (x, y)\rangle := \langle x^*, x\rangle + \langle y^*, y\rangle$. (Brevemente, esto se expresa por $(X \times Y)_p^* = (X^* \times Y^*)_q$.)

4. Prueba que los espacios $c$ y $\ell^\infty$ no son reflexivos.

5. Prueba que el espacio de Banach $C_0(\mathbb{R}^n)$ es separable.

6. Sea $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ y $\varphi_{n,m}(x, s) := \varphi_n(x)\varphi_m(s)$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$. Prueba que $\{\varphi_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R}^2)$.

7. Sean $a > 0$ y $f : [-a, a] \to \mathbb{C}$. Si $f$ es impar e integrable, prueba que $\int_{-a}^a f(s)ds = 0$.

8. Sea $f$ la función definida por $f(t) := t,\ -\pi < t < \pi$.

i) Calcula sus coeficientes de Fourier clásicos.

ii) Prueba que $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

9. Sean $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Si $f \in L^1(a, b)$ y $\int_a^b fx^m = 0,\ m = 0, 1, \ldots$, prueba que $f = 0$ c.t.p. (Sug.: Prueba primero que $\int_a^b fh = 0,\ \forall\, h \in C[a, b]$. Después, expresa $|\, f| = fg$, donde $g \in L^\infty(a, b)1$, y aproxima a $g$ puntualmente por funciones continuas.) )

10. Sean $A$ y $B$ álgebras y $h :\to B$ un homomorfismo de álgebras. Prueba:

i) $h(A)$ es una subálgebra de $B$.

ii) Si $A$ es conmutativa, entonces $h(A)$ es conmutativa.

iii) Si $e$ es elemento identidad en $A$, entonces $h(e)$ lo es en $h(A)$.

11. Sean $X$ un espacio vectorial, $\mathcal{S} := \{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de seminormas definidas en $X$, y $\tau$ la topología que induce. Prueba que las siguientes propiedades son equivalentes:

i) $\mathcal{S}$ separa puntos en $X$.

ii) Para cada $x \in X$ existe $\alpha \in J$ tal que $\|x\|_\alpha \neq 0$.

iii) La topología $\tau$ es Hausdorff.

Para revisar y entregarse el viernes 20 de marzo, 2015.