ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 10

1. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto con medida finita y $1 < p < 2$. Prueba:

i) Si $\varphi \in L^p(\Omega)^*$, entonces existe $g \in L^0(\Omega)$ tal que $\varphi(f) = \int_\Omega fg, \ \forall f \in L^2(\Omega)$. (Sug.: trata de proceder como en el caso $p = 1$).

ii) $g \in L^q(\Omega)$. Concluye que el operador de Riesz R_p es suprayectivo.

2. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{K}$ una función medible que es integrable en $[0, x], \forall x \geq 0$ Prueba que $Vf : [0, \infty) \to \mathbb{K}$ dada por $Vf(x) := \int_0^x f(s)ds$ es continua.

3. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Prueba que su transformada de Fourier $\hat{f}$ pertenece a $C_0(\mathbb{R}^n)$. (Sug.: Considera primero el caso en que f es la función característica de un conjunto de la forma $I_1 \times \ldots \times I_N$, siendo cada I_j un intervalo acotado; después trata el caso de una funcion escalonada y finalmente el caso general, teniendo presente el ejercicio 7.10.)

4. Sea $s := \{a_n\} \subset \mathbb{K}$ una sucesión tal que $|a_n| = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dada $x := \{x_n\} \in \ell^2$, definamos $U_s x := \{a_n x_n\}$. Prueba que $U_s \in \ell^2$ y que $U_s : \ell^2 \to \ell^2$ es un operador unitario.

5. Prueba que $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} nx \ : n \in \mathbb{N} \right\}$ constituye una base ortonormal en $L^2(0, \pi)$. (Sug.: dada $f \in L^2(0, \pi)$, extiéndela de manera impar a $(-\pi, \pi)$.)

6. Sean A un álgebra de Banach y $x, y \in A$. Si x y y conmuta, entre sí, prueba que $e^x e^y = ex + y$. Concluye que, para cada $x \in A$, e^x es invertible.

7. Sea A un álgebra. Si $x, y \in A$ son invertibles y conmutan entre sí, prueba que sus inversos también conmutan.

Definición Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un conjunto $M \subset A$ es un *ideal* (bilateral) si cumple: $0 \in M$; si $x, y \in M$, entonces $x + y \in M$; si $x \in M$, entonces $-x \in M$; si $y \in A, x \in M$, entonces xy, $yx \in M$.

8. Sean A un álgebra con identidad y $M \subset A$. Prueba que M es un ideal si, y sólo si, M es un subespacio vectorial de A y si $x \in M, \ y \in A$, se cumple que $xy, \ yx \in M$.

9. Sean $T \in \mathcal{L}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\{x_n\} \subset X$ tal que $\|x_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Prueba que $\lambda \in \sigma(T)$ en los siguientes casos:

i) Si $(T - \lambda I)x_n \to 0$. ii) Si $\lambda_n \to \lambda$ y $(T - \lambda_n I)x_n \to 0$.

10. Sean X un espacio normado y $T \in \mathcal{L}(X)$. Supongamos que λ_j es un valor propio de T y v_j un vector propio correspondiente, $j = 1, \ldots, n$. Si los escalares λ_j's son distintos entre sí, prueba que los vectores $v_1, \cdots, v_n$, son linealmente independientes.

11. Sea X un espacio vectorial topológico X, obtenido a partir de una familia de seminormas $\mathcal{S} := \{\| \cdot \|_\alpha : \alpha \in J\}$ que se anulan sólo en 0 y consideremos una sucesión $\{x_n\} \subset X$. Prueba que $x_n \to 0$ en X si, y sólo si, $\|x_n\|_\alpha \to 0, \ \forall \alpha \in J$.

Para revisar y entregarse el viernes 17 de abril, 2015.
Examen parcial 2: martes 21 de abril.