ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 11

Enseguida X y Y siempre son espacios normados y A es un álgebra.

1. Sean $M \subsetneq A$ un ideal cerrado y en el espacio de Banach cociente A/M definamos $[x][y] := [xy]$. Prueba que esto define un producto en A/M y que de esta forma A/M es un álgebra de Banach.

Notación Denotaremos por $F(X,Y)$ el conjunto operadores $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ que son de rango finito y $F(X) := F(X,X)$.

2. Prueba: i) $F(X,Y)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(X,Y)$.

ii) $F(X)$ es un ideal de $\mathcal{L}(X)$.

3. Supongamos que e es la identidad en A y $x, y \in A$.

i) Si existen $a, b \in A$ tales que $ax = e = xb$, prueba que $a = b$. Por lo tanto, x es invertible.

ii) Si xy es invertible y x, y conmutan, prueba que x y y son invertibles.

4. Sea $X := \ell^2$. Encuentra un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ que tenga inverso por la derecha y que no sea invertible.

5. Prueba que el grupo de operadores invertibles es denso en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

6. Sea H un espacio de Hilbert y $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal. Si $B := \{v_n \in \mathbb{N}\} \subset H$ es un sistema ortonormal en H y $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - v_n\|^2 < 1$, prueba que B también es una base ortonormal.

Definición Sean W un espacio vectorial y $\mathcal{S}$ una colección de operadores lineales $T : W \to W$. Un subespacio vectorial $V \subset W$ es *invariante bajo* $\mathcal{S}$, si $SV \subset V$, $\forall\, S \in \mathcal{S}$. Cuando $\mathcal{S} = \{T\}$, simplemente diremos que V es *invariante bajo* T(o T-invariante).

7. Sean $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(X)$ y $V \subset X$ un subespacio. Si V es invariante bajo $\mathcal{S}$, prueba que $\overline{V}$ también lo es.

8. Sean $X := C[0,1]$, $V : X \to X$ el operador de Volterra, $f \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Prueba:

i) $V^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(s)(x-s)^{n-1} ds$.

ii) $V^n f$ es n veces continuamente derivable y $\frac{d^n}{dx^n} V^n f = f$.

9. Encuentra explícitamente la función resolvente $(V - \lambda I)^{-1}$ para el operador de Volterra $V : C[0,1] \to C[0,1]$.

10. Sea $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{K}$ una sucesión acotada, $p \in [1, \infty], X := \ell^p$ y definamos $T : X \to X$ por $T(x_1, \ldots, x_n, \ldots,) := (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n, \ldots)$. Prueba que $T \in \mathcal{L}(X)$ y $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_n\}}$.

11. Sea X un espacio normado. Para cada $\varphi \in X^*$, consideremos la función $\|x\|_\varphi := |\varphi(x)|$. Prueba:

i) Cada una de estas funciones es una seminorma.

ii) la colección de seminormas $\mathcal{S} := \{\|x\|_\varphi : \varphi \in X^*\}$ sólo se anula en 0.

Definición A la topología en X inducida por $\mathcal{S}$ se le llama *topología débil* de X y se denota por $\tau(X, X^*)$.

iii) La convergencia bajo la topología débil coincide con la convergencia débil.

Para revisar y entregarse el viernes 24 de abril, 2015.