ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 12

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible con medida positiva. Prueba que $L^\infty(\Omega)$ es un álgebra de Banach y determina sus elementos invertibles.

Enseguida X y Y siempre son espacios normados y A, B son álgebras.

2. Dado $x \in A$, prueba que su *conmutador* $\mathrm{Conm}(x) := \{y \in A : xy = yx\}$ es una subálgebra con identidad que es cerrada y $\mathbb{K}[x] \subset \mathrm{Conm}(x)$.

3. Supongamos que $\dim A < \infty$ y $x \in A$. Si x tiene inverso por la izquierda (o por la derecha), prueba que x es invertible. (Sug.: Considera el operador $Tu = xu, \ \forall\, u \in A$.)

4. Si $M \subset A$ es un ideal, prueba que $\overline{M}$ también lo es.

5. Si $K \subset S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es un conjunto compacto y no-vacío, prueba que existe un operador unitario tal que $\sigma(T) = K$.

6. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Prueba que las siguientes propiedades son equivalentes:
i) $r_s(T) < 1$.
ii) Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T^N\| < 1$.
iii) $\lim_{n\to\infty} T^n = 0$.

7. (Identidad de Hilbert) Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ y $R(\lambda) := (T - \lambda I)^{-1}, \ \forall\, \lambda \in \rho(T)$. Si $\lambda_0 \in \rho(T)$ prueba que se cumple $R(\lambda) - R(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)R(\lambda)R(\lambda_0)$, cuando$|\, \lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0)\|^{-1}$.

8. Sean X, Y y Z espacios normados y $T : X \to Y$, $S : Y \to Z$ operadores lineales. Prueba que ST es compacto en los dos casos siguientes:
i) T es acotado y S es compacto.
ii) T es compacto y S es acotado.

9. Sean X y Y espacios normados. Si $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, prueba que su operador inducido en $X/N(T)$ también lo es.

10. Sea X un espacio normado, $T \in \mathcal{L}(X)$ y $V \subset X$ un subespacio. Si V es invariante bajo T y $x \in V$, prueba que V contiene al espacio generado por la sucesión de iterados $\{T^n x : n = 0, 1, \ldots\}$.

Definición Sea X un espacio normado. Para cada $x \in X$, consideremos la función definida en X^* por $\|\varphi\|_x := |\varphi(x)|$.

11. Prueba:

i) Cada una de estas funciones es una seminorma.

ii) la colección de seminormas $\mathcal{S} := \{\|x\|_\varphi : \varphi \in X^*\}$ sólo se anula en 0.

Definición A la topología en X^* inducida por $\mathcal{S}$ se le llama *topología débil-** (weak-star) de X^* y se denota por $\sigma(X^*, X)$.

iii) Si X es un espacio reflexivo, prueba que en X^* las topologías débil y débil-* coinciden.

Para entregar y revisarse el jueves 30 de abril, 2015