ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 13

Enseguida X y Y siempre son espacios normados y A, B son álgebras.

1. Sea $T : X \to X$ un operador lineal. Si $\mathrm{Conm}(T) = \mathcal{L}(X)$, prueba que $T = \lambda I$, para algún $\lambda \in \mathbb{K}$. (Sug.: considera operadores de la forma $x \otimes \varphi$.)

Definición Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto con medida positiva. El *rango esencial* de una función medible $f : \Omega \to \mathbb{K}$ se denotará por $R_{\text{ess}}(f)$, y es el conjunto formado por los elementos $w \in \mathbb{K}$ tales que

$$\mu(\{x \in \Omega : |w - f(x)| < \epsilon\}) > 0, \quad \forall \epsilon > 0.$$

2. Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ funciones medibles. Prueba:

i) Si $f = g$ c.t.p., entonces $R_{\text{ess}}(f) = R_{\text{ess}}(g)$.

ii) Sea $f \in L^\infty(\Omega)$. Entonces f es invertible si, y sólo si, $0 \notin R_{\text{ess}}(f)$.

iii) Describe el espectro de $f \in L^\infty(\Omega)$.

3. Prueba que $F(X, Y)$ es el espacio generado por los operadores de la forma $y \otimes \varphi : X \to Y$, donde $\varphi \in X^*$ y $y \in Y$.

4. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Determina $\sigma_\pi(T)$, $\sigma_c(T)$ y $\sigma_r(T)$ para el operador lineal $T : \ell^p \to \ell^p$ definido por $T(x_1, x_2, \ldots) := (x_2, x_3, \ldots)$.

Definición Un valor propio λ de $T \in \mathcal{L}(X)$, es *simple* si $\dim N(T - \lambda I) = 0$.

5. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ y supongamos que $v \in X$ es un vector propio asociado a un valor propio simple de T. Si $S \in \mathrm{Conm}(T)$ y S es 1-1, prueba que v también es vector propio de S.

6. Sean X un espacio de Banach complejo y $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $\sigma(T)$ no es finito, prueba que el homomorfismo canónico de $\mathbb{K}[x]$ en $\mathbb{K}[T]$ ($P \mapsto P(T)$), es 1-1.

7. Sean $T \in \mathcal{L}(X)$ y R su función resolvente. Si $B \subset \rho(T)$ y B es cerrado en $\mathbb{K}^n$, prueba que R es acotada en B.

8. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto no-vacío. Prueba que la inclusión de $C^1(I)$ en $C(I)$ es compacta. ($\|f\|_{C^1} := \text{máx}\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$.)

9. Sean X y Y espacios de Banach. Si $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ y $R(K)$ es cerrado, prueba que $\dim R(K) < \infty$. (Luego, si $\dim R(K) = \infty$, entonces $R(K)$ no es cerrado.)

10. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Prueba que los espacios $N(T)$ y $R(T)$ son invariantes bajo $\mathrm{Conm}(T)$.

Definición Sea X y Y espacios normados. Para cada $x \in X$, consideremos la función definida en $\mathcal{L}(X,Y)$ por $\|T\|_x := \|Tx\|$.

11. Prueba:

i) Cada una de estas funciones es una seminorma.

ii) la colección de seminormas $\mathcal{S} := \{\|\cdot\|_x : x \in X\}$ sólo se anula en 0.

Definición A la topología en $\mathcal{L}(X,Y)$ inducida por $\mathcal{S}$ se le llama *topología fuerte* de $\mathcal{L}(X,Y)$ y la denotaremos por $\tau(\mathcal{L}(X,Y))$.

iii) Sean $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Prueba que $T_n \to T$ en $\tau(\mathcal{L}(X,Y)$ si, y sólo si, $T_n x \to Tx, \forall\, x \in X$. En cualquiera de estos casos se dice que la sucesión $\{T_n\}$ *converge fuertemente* a T.

Para revisar y entregarse el viernes 8 de mayo, 2015