ANALISIS FUNCIONAL 2: TAREA 14

1. Sean A un álgebra de Banach y $x, y \in A$. Si x es invertible, prueba que $\sigma(xy) = \sigma(yx)$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador definido por $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, \frac{1}{2}x_3)$. Verifica que $0 < r_\sigma(T) < r_s(T)$.

3. Consideremos $A := C(K, \mathbb{K})$, donde K es un espacio compacto. Determina cómo están relacionados $r_\sigma(f)$, $r_s(f)$ y $\|f\|$, $\forall\, f \in A$.

Enseguida X y Y siempre son espacios normados.

4. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ y supongamos que $\sigma(T) \neq \emptyset$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $A_\epsilon := \{\mu \in \mathbb{K} : d(\mu, \sigma(T) \geq \epsilon$.

i) Prueba que existe $r > 0$ tal que si $S \in \mathcal{L}(X)$ y $\|T - S\| < r$, entonces $A_\epsilon \subset \rho(S)$. (Sug. : considera el ejercicio 13.7.)

ii) Concluye que para tal r se cumple que si $S \in \mathcal{L}(X)$ y $\|T - S\| < r$, entonces $d(\mu, \sigma(T)) < \epsilon$, para cualquier $\mu \in \sigma(S)$.

5. Sea $\{a_n\} \in c_0, p \in [1, \infty)$. Para $x = \{x_n\} \in \ell^p$, definamos $Tx := \{a_n x_n\}$. Verifica que $Tf \in \ell^p$ y prueba que $T \in \mathcal{K}(\ell^p)$.

6. Sea H un espacio de Hilbert. Si $K \in \mathcal{L}(H)$ es compacto, prueba que K se puede aproximar por operadores de rango finito.

7. Si $T \in K(X, Y)$, prueba que T lleva sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes. (Sug.: T preserva convergencia débil.)

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado y no-vacío. Consideremos un núcleo continuo $K : \overline{\Omega}^2 \to \mathbb{K}$ y denotemos por T su operador integral correspondiente. Prueba:

i) $Tf \in C(\overline{\Omega}),\ \forall\, f \in L^1(\Omega)$.

ii) $T : L^1(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ es un operador lineal compacto.

iii) $T : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ es compacto, $\forall\, p \in [1, \infty]$.

Definición La *convolución* de dos funciones medibles $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$, es la función $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy$, definida en aquellos $x \in \mathbb{R}^n$ donde lo anterior tenga sentido.

9. Prueba: i) Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

ii) La función $B : L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ definida por $B(f, g) = f * g$, es bilineal y acotada. (Obs.: Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ es medible, supondremos conocido que $F(x, y) := g(x - y)$ es medible en $\mathbb{R}^{2n}$.)

10. Sea X un espacio de Banach y supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n \in \mathcal{L}(X)$ es una proyeción. Si la sucesión de funciones $\{P_n\}$ converge fuertemente, prueba que su límite P también es una proyección.

Definición Sea X y Y espacios normados. Para cada $x \in X$ y $\varphi \in Y^*$, consideremos la función definida en $\mathcal{L}(X, Y)$ por $\|T\|_{x,\varphi} := |\langle Tx, \varphi \rangle|$.

11. Prueba:

i) Cada una de estas funciones es una seminorma.

ii) La colección $\mathcal{S} := \{\| \cdot \|_{x,\varphi} : x \in X, \varphi \in Y^*\}$ sólo se anula en 0.

Definición La topología en $\mathcal{L}(X, Y)$ inducida por $\mathcal{S}$ se denotará por $\sigma(\mathcal{L}(X, Y))$.

iii) Describe la convergencia en $\sigma(\mathcal{L}(X, Y))$.

Para revisar y entregarse el viernes 15 de mayo, 2015.